

МИНТРАНС РОССИИ
РОСАВИАЦИЯ
ФГОУ ВПО «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ»

Ю.Н.Сарайский

ГЕОИНФОРМАЦИОННЫЕ ОСНОВЫ НАВИГАЦИИ

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2010

Сарайский Ю.Н. Геоинформационные основы навигации: Учебное пособие.-СПб:СПбГУГА, 2010,- с.

Изложены основные сведения из геодезии, картографии и астрономии, необходимые для аэронавигационного обеспечения, подготовки и выполнения полетов.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки «Аэронавигация». Может быть использовано персоналом аэронавигационного обеспечения полетов, летным и диспетчерским составом подразделений гражданской авиации.

Рецензенты:

ПРЕДИСЛОВИЕ

Организация, подготовка, обеспечение и выполнение полетов невозможны без знания авиационным персоналом широкого круга вопросов, связанных с применением различных систем координат на земной поверхности, построением авиационных карт, измерением времени и определением условий естественного освещения.

На протяжении десятилетий в учебных заведениях гражданской авиации эти вопросы рассматривались в дисциплине под названием «Авиационная картография», поскольку именно полетная карта традиционно являлась одним из основных средств подготовки и выполнения полета.

В настоящее время широкое использование в гражданской авиации современных навигационных комплексов и автоматизированных систем аэронавигационного обеспечения полетов, повышение требований к точности аэронавигации привели к тому, что карта как средство навигационной ориентировки в значительной степени утратила свое значение и превратилась главным образом в носителя аэронавигационных данных: координат, пеленгов, путевых углов и т.д. Именно данные, в первую очередь координаты, являются основой современной автоматизированной навигации. В соответствии с этим в содержании дисциплины возросла роль геодезических вопросов, касающихся систем координат, в то время как собственно картография отошла на второй план.

В связи с изменением содержания и структуры дисциплины она была переименована в «Геоинформационные основы навигации». Такое название обусловлено тем, что материал дисциплины с одной стороны касается формы и физических полей нашей планеты, а с другой - является той информационной основой, без которой невозможно осуществление аэронавигации.

Учебное пособие написано на основе курса лекций, читаемых автором в Санкт-Петербургском государственном университете гражданской авиации для студентов специализаций воздушная навигация, аэронавигационное обеспечение полетов, летная эксплуатация гражданских воздушных судов.

Автор выражает благодарность коллегам по кафедре аэронавигации СПб ГУГА за ценные советы по содержанию учебного пособия и особенно О.Е.Архиповой за помощь в подготовке рукописи к печати и оформление иллюстративного материала.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Предмет дисциплины

В процессе аэронавигации и аэронавигационного обеспечения полетов постоянно возникают задачи, связанные с определением координат точек на земной поверхности (места самолета, пунктов маршрута и ориентиров), расстояний между ними и направлений (путевых углов, пеленгов), построением линий положения и т.д. И при решении даже простых задач возникают непростые вопросы.

Например, известны два места самолета в определенные моменты времени и необходимо определить путевую скорость. Первое, что приходит в голову – измерить пройденное расстояние на карте и разделить на время. Но стоит задуматься: а что такое, собственно, карта? В каком соотношении она находится с местностью, которую изображает? Где гарантия, что расстояние, измеренное на карте, будет соответствовать расстоянию, пройденному самолетом на местности?

Чтобы не отвечать на эти вопросы, можно попытаться обойтись и без карты. Можно считать, что эти два места самолета получены в виде координат (широты, долготы и высоты) с помощью спутниковой навигационной системы и попробовать рассчитать расстояние между этими двумя точками по формулам. Но тогда возникнут другие вопросы. А что такое широта и долгота? От какого уровня измеряется полученная высота? Как, зная координаты двух точек, рассчитать расстояние между ними?

Целый ряд вопросов возникает и в связи с измерением времени. Что такое время? Что, собственно, означает, когда мы говорим, что сейчас, например, 13 час 46 мин 54 сек? Почему именно столько?

Для ответа на перечисленные вопросы, решения этих и, конечно, множества других, задач необходимы сведения из разных наук, таких как картография, геодезия, астрономия.

Геодезия (слово произошло от греческих слов, означающих «земля» и «делить на части») – это наука, изучающая форму и размеры Земли и разрабатывающая вопросы создания координатной основы для решения прикладных задач.

Она условно разделяется на высшую геодезию и инженерную геодезию («низшей» ее не называют, но иногда называют прикладной). Высшая геодезия изучает фигуру Земли как планеты в целом, ее гравитационное поле, от которого эта форма зависит. Она включает в себя, в частности, сфероидическую геодезию, изучающую геометрию земного эллипсоида, который аппроксимирует форму реальной Земли.

Инженерная геодезия занимается сравнительно небольшими участками Земли и направлена на решение практических задач: определение расстояний и направлений между точками на местности, высот рельефа и т.д.

Она имеет важное значение для проектирования и строительства аэродромов, зданий, сооружений, дорог и т.п.

Картография – это наука о составлении, производстве и применении карт.

Естественно, возникает вопрос – что такое карта? Достаточно полное определение выглядит следующим образом.

Карта – это уменьшенное, измеримое и обобщенное изображение на плоскости поверхности Земли или небесных тел, построенное по определенному математическому закону и наглядно показывающее при помощи условных знаков размещение и связи различных предметов и явлений, их качественные и количественные характеристики.

Такое определение охватывает все возможные виды карт. Для наших навигационных целей можно дать и более простое определение.

Карта – это сплошное условное изображение земной поверхности или отдельных ее частей на плоскости, выполненное по определенному закону.

Следует отметить, что не любое изображение поверхности Земли, выполненное в масштабе, можно назвать картой. Например, можно схематически изобразить на листе бумаги расположение построек и грядок на садовом участке. При этом, конечно, можно считать Землю плоской, что вполне допустимо для столь небольшого участка местности. Такое изображение в масштабе относительно небольших участков местности, при котором пренебрегается кривизной Земли, называется *планом*. При изображении больших территорий пренебречь этой кривизной нельзя – иначе, при измерениях на карте будут большие погрешности.

К сожалению, «кривую» поверхность Земли изобразить на плоскости (листе бумаги) без разрывов и искажений (сжатий, растяжений) невозможно. Поэтому необходимо использовать такой математический закон отображения (картографическую проекцию), при котором искажения были бы по возможности меньше.

Картография тоже делится на несколько составляющих :

- математическую картографию, которая занимается картографическими проекциями, искажениями на картах, координатными сетками,
- картоведение, которое изучает свойства карт, их виды и элементы, их историю и т.п.
- картометрию, занимающуюся вопросами измерения на картах,
- оформление карт (изучает условные знаки, цвета, используемые на картах и т.п),
- издание карт (методы печати и пр.),

и, конечно, другие составляющие, которые нет необходимости здесь перечислять.

Понятно, что карты вообще применяются в самых разных областях жизни и отраслях хозяйства: не только в географии, но и в политике, экономике, для мореплавания, сельского хозяйства и т.п. Разумеется, широко

применяются карты и в авиации. В связи с этим оформилась такая дисциплина как авиационная картография, которая изучает вопросы применения карт для решения задач аэронавигации. Она основывается на материале и математической картографии, и картометрии и других теоретических дисциплин, в том числе, конечно, высшей геодезии, которая занимает в этой дисциплине важное место.

Интересно, что еще 20-30 лет назад основное внимание в этой дисциплине уделялось собственно картографии, поскольку именно с помощью карт штурман определял местоположение воздушного судна и решал навигационные задачи. Геодезия же в содержании этой дисциплины играла вспомогательную роль.

В настоящее время ситуация изменилась на противоположную. Карты в полете все реже используются для измерений и решения навигационных задач, а в основном они играют роль носителя *аэронавигационной информации* (данных о работе радиотехнических средств, параметров маршрута и т.п.). Это объясняется широким внедрением автоматизированных навигационных систем, которые могут определять место самолета и обеспечивать вождение по линии заданного пути на основе использования введенных в них *аэронавигационных данных*. При этом никаких графических построений экипажу, выполнять, естественно, не нужно. Но, вместе с тем, неизмеримо возросла роль самих данных, в первую очередь координат пунктов маршрута и радиомаяков. Вопросы обеспечения их необходимой точности тесно связаны с геодезией, которая занимает теперь более важное место.

Полет протекает не только в пространстве, но и во времени, которое можно рассматривать как четвертую координату, определяющую положение воздушного судна. Разумеется, авиационному специалисту необходимо иметь достаточно полное представление о том, как устроена шкала времени, как оно измеряется. Исторически измерение времени основывается на видимом движении небесных светил и, в первую очередь, Солнца. Отсюда следует, что для правильного понимания этих вопросов необходимо иметь определенные знания по астрономии.

Общей для всего перечисленного круга вопросов является их связь с Землей как планетой, ее формой и движением. Поэтому сведения из высшей геодезии, картографии и астрономии, позволяющие правильно понимать и использовать навигационную информацию, являются основой для осуществления аэронавигации в полете. Это и обусловило название дисциплины и данного учебного пособия – *геоинформационные основы навигации*.

1.2. Краткая историческая справка

Геодезия, картография и астрономия имеют свою долгую интересную историю. В данном параграфе отмечены лишь некоторые наиболее важные вехи их развития.

О том, что Земля круглая, возможно, знал уже *Пифагор* (571-497 до н.э.). Совершенно точно об этом было известно *Аристотелю* (384-322 до н.э.), который даже предложил ряд свидетельств этого: постепенное исчезновение кораблей за горизонтом, аналогия с формой других небесных светил и т.п. Правда, по его мнению, неизвестно, на чем основанному, Земля была в 1,5-2 раза больше, чем на самом деле.

Впервые определить размеры нашей планеты удалось *Эратосфену* (278-196 г. до н.э.). Для этого он изобрел способ, который потом использовался и другими учеными.

Способ заключался в следующем. В Египте в городе Александрия в полдень в день летнего солнцестояния Эратосфен измерил зенитное расстояние Солнца, то есть угол, между направлением в зенит и на Солнце. Этот который оказался равным $7,2^\circ$ или $1/50$ полной окружности. Эратосфен знал, что в это же время в городе Сиена (сейчас это Асуан) Солнце находится в зените (прямо над головой). Поскольку Сиена находится к югу от Александрии на расстоянии 5000 стадий, нетрудно определить окружность Земли (она в 50 раз больше этого расстояния) и затем радиус (рис. 1.1).

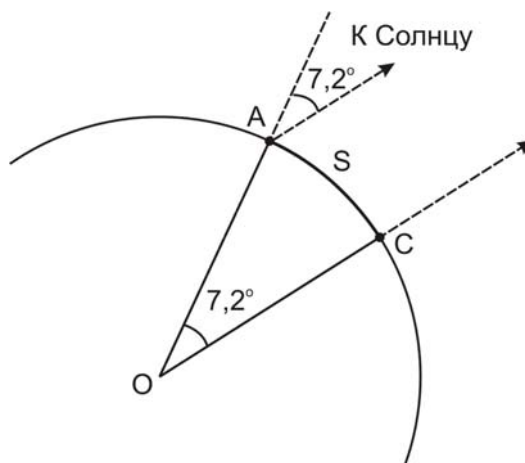


Рис. 1.1. Определение размеров Земли Эратосфеном

Неизвестно, насколько точно Эратосфену удалось решить эту задачу, поскольку теперь уже никому не известна точная длина одной стадии в современных единицах. Предполагают, что ошибка составила от 1 до 20%. Но как бы то ни было, заслуга Эратосфена в том, что он впервые предложил научный метод для решения этой задачи.

Таким же методом арабы на рубеже VII и IX веков уже нашей эры измерили длину одного градуса меридиана (правда, использовали не Солнце, а звезды). Эта длина у них оказалась равной 111,8 км. Этот результат для средних веков настолько точен (отличается от средней длины одного градуса меридиана лишь на 600 метров), что, возможно, так точно получилось случайно.

Важным вкладом в науку явилось изобретение Снеллиусом (1580-1626 г.г.) метода *триангуляции* для измерения расстояний на земной поверхности. Этот метод и сейчас остается одним из основных в современной геодезии.

Термин триангуляция происходит от слова triangle (треугольник), а сам метод заключается в следующем. С максимальной точностью измеряется длина базиса, то есть расстояние между двумя пунктами А и В. Из этих пунктов с помощью угломерных инструментов (теодолитов) измеряются углы между базисом и направлением на третий пункт С (рис.1.2). Два угла и сторона между ними полностью определяют треугольник АВС. Расстояния АС и ВС можно просто вычислить по формулам тригонометрии.

Теперь уже АС и ВС могут служить основой для решения других, смежных с ними треугольников. Таким образом можно продолжить распространение сети треугольников на сколь угодно большие расстояния, последовательно определяя координаты пунктов. В настоящее время вся территория страны покрыта такими геодезическими сетями. Без этого способа было бы невозможно определять такие расстояния до недоступных объектов, которые из-за характера местности рулеткой измерить невозможно.

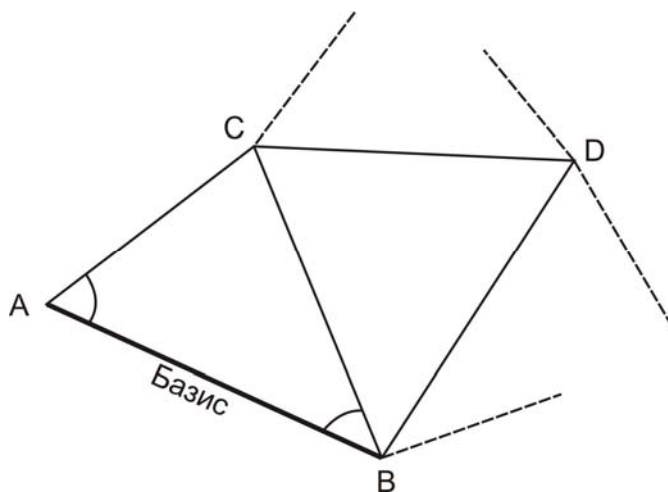


Рис. 1.2. Триангуляция

На основе метода триангуляции французский ученый Пикар в 1870 г. определил длину одного градуса меридиана с ошибкой всего лишь 8 метров.

Вклад И.Ньютона (1642-1727 г.г.) в геодезию заключается в том, что он заложил основы теории фигуры Земли. Ньютон совершенно правильно предположил, что сила тяжести является равнодействующей силы притяжения Земли и центробежной силы. Сила притяжения вызвана массой

Земли и действует в соответствии с открытым тем же Ньютоном законом всемирного тяготения. Центробежная сила возникает из-за вращения нашей планеты вокруг своей оси. На разных широтах центробежная сила различна, поскольку она зависит не только от скорости вращения, но и радиуса вращения, т.е. радиуса параллели. Следовательно, различна и величина силы тяжести, и ее направление по отношению к центру Земли.

Предположив, что Земля представляет собой вращающуюся однородную массу, Ньютон вывел, что Земля должна быть «сплюснута», то есть иметь форму не шара, а эллипсоида. Ньютон рассчитал, что сжатие этого эллипсоида должно составлять $1/230$. На самом деле, Земля, конечно, не является однородной и поэтому реальное сжатие меньше (примерно $1/298$). Из расчетов Ньютона следовало, что длина одного градуса меридиана на различных широтах должна быть разной. Это блестяще подтвердилось многочисленными снаряженными для проверки данного факта экспедициями.

Градусные измерения по меридиану имеют важное значение для геодезии, они многократно производились в разных странах, в том числе и в России. Под руководством *Василия Яковлевича Струве* (1793-1864), директора Пулковской обсерватории, было проведено измерение длины меридиана на расстоянии 2820 км («дуга Струве» или «Русско-скандинавская дуга»). По результатам подобных измерений были первоначально установлены такие единицы измерения как *метр* (одна десятиmillionная часть длины Парижского меридиана от экватора до полюса) и *морская миля* (*nautical mile*), равная средней длине одной минуты ($1/60$ градуса) меридиана.

И в России геодезия имеет древнюю историю. Петр Первый еще в 1696 г. организовал топографические съемки на Дону. В 1822 г. был создан корпус военных топографов. При советской власти было сделано много в области геодезии как в теоретическом, так и в практическом отношении. Среди многочисленных ученых необходимо отметить *Феодосия Николаевича Красовского* (1878-1948), *Михаила Сергеевича Молоденского* (1909-1991) и *Владимира Владимировича Каврайского* (1884-1954), о вкладе которых в эту науку более подробно будет рассказано ниже.

История собственно картографии также довольно древняя. В VI в. до н.э. *Анаксимандр Милетский* составил первую карту известной тогда части мира. Во II в. уже нашей эры *Птолемей* написал труд «География», в котором рассмотрел способы создания карт и определения размеров Земли. После эпохи Возрождения бурно развивалась математическая картография, разрабатывались различные виды проекций: Меркатора, Сансона, Ламберта. «Король математиков» Карл Гаусс решил задачу равноугольного отображения одной поверхности на другую, что имело важное значение для картографии.

В конце XVI в. была создана первая карта Московского государства – «Большой чертеж», а в 1701 – «Чертежная книга Сибири». Под руководством М.В.Ломоносова географический департамент России создал карты всего

мира, включая, конечно, Россию с Северным Ледовитым океаном. При этом использовались косая стереографическая, равноугольная цилиндрическая, нормальная азимутальная равнопромежуточная проекции.

Необходимость использования особых карт для воздухоплавания отмечалась еще в одной из книг в 1866 г. Первая авиационная карта была издана в 1911 г. для перелета Санкт-Петербург-Москва. Она охватывала полосу шириной 15-20 верст и была составлена в масштабах в 1 дюйме 2 версты, в 1 дюйме 10 верст. Магнитный меридиан был изображен стрелками у поворотов железной дороги, вдоль которой и предполагалось выполнение полета. В 1924 году была издана карта для полета по маршруту Москва-Н.Новгород-Казань масштабом в 1см 10 км.

2. ЗЕМЛЯ КАК ПЛАНЕТА

2.1. Фигура Земли и ее движение

Земля представляет собой небесное тело примерно эллипсоидальной формы. По твердости ее можно назвать упруго-вязкой. Это означает, что если Землю быстро сжать (ударить), то она упругая, а если медленно – вязкая.

Достоверно о происхождении Земли неизвестно. Возраст нашей планеты оценивается в 4,5 миллиарда лет. Раньше считали, что первоначально она была огненно-жидкой, но сейчас ученые склоняются к тому, что Земля образовалась из газопылевого облака.

Масса Земли $6 \cdot 10^{24}$ кг, а средняя плотность $5,52 \text{ кг/см}^3$. Но внутри планеты ее плотность неравномерна. У поверхности она составляет менее $3,5 \text{ кг/см}^3$, следовательно, во внутренних слоях плотность гораздо больше.

Можно выделить следующие слои планеты.

1) *Земная кора* толщиной обычно 30-40 км. Максимальная толщина 70 км, а минимальная (в океанах) до 6 км.

2) *Оболочка (мантия)*, простирающаяся от коры до глубины 2900 км. Граница между корой и мантией названа границей Мохоровича в честь югославского геофизика.

3) *Ядро* – на глубине от 2900 км до 5100 км.

4) *Субъядро* – от глубины 5100 км до центра планеты (радиус Земли около 6400 км). Предполагается, что в субъядре плотность достигает 19 кг/см^3 .

Земная кора – самая неравномерная и подвижная часть планеты. Ей свойственны приливно-отливные движения, перемещения материков. Масса коры всего 1%, но все неправильности заложены именно в коре. Перемещения континентов в горизонтальном направлении в среднем составляют 3 см в год, а в вертикальном 4 см в год. Но в некоторых местах бывают гораздо больше. Например, Мехико за 100 лет опустился на 6 м.

Поскольку на Земле необходимо задать систему координат, важное значение имеет вопрос о том, какую форму имеет поверхность планеты. Ответить на вопрос какую форму или, как говорят, фигуру, имеет Земля нельзя однозначно, это зависит от того, что понимать под формой. Конечно, как и любое тело, Земля имеет форму, ограниченную ее так называемой *физической поверхностью*, причем форму довольно неправильную – со всеми неровностями рельефа. Она к тому же все время меняется и не только вследствие геологических процессов. Любой человек, например, выкопав яму, изменяет физическую поверхность Земли.

Использовать физическую поверхность Земли для навигации, например, задать на ней правильную координатную сетку, практически невозможно. Меридианы и параллели были бы «кривыми». По координатам

точек в такой системе координат было бы невозможно по формулам рассчитывать расстояния и направления между точками

Следовательно, физическую поверхность Земли необходимо «сгладить». Эта операция выполняется с помощью так называемых уровенных поверхностей.

Уровенная поверхность – это такая поверхность, которая пересекает все отвесные линии под прямым углом.

В свою очередь, *отвесная линия* – это линия, совпадающая с направлением силы тяжести в данной точке.

Отвесом мы называем груз, подвешенный на нити. Направление этой нити и есть направление отвесной линии. Направлены отвесные линии «вниз», но вовсе не точно к центру Земли, как можно было бы подумать. Отвесные линии не параллельны в разных, даже близлежащих, местах как минимум по двум причинам. Во-первых, потому, что массы в земной коре распределены неравномерно, а ведь именно они создают силу притяжения. А во-вторых, потому, что Земля сплюснута и вращается. Следовательно, на каждое материальное тело действует центробежная сила, вызывающая отклонение отвесной линии.

Уклонения отвесных линий невелики (обычно составляют единицы угловых секунд), но тем не менее в каждой точке отвесные линии направлены по-разному. Отсюда следует, что и уровенные поверхности, проведенные перпендикулярно этим линиям, будут иметь неправильную форму (рис. 2.1).

Уровенных поверхностей можно провести бесконечно много и они примерно параллельны друг другу (если не учитывать сжатие Земли и неравномерность гравитационного поля). Одна из них принимается за поверхность, ограничивающую фигуру Земли. По предложению немецкого физика Листинга (1873 г.) эта поверхность получила название геоида. Определение геоида основано на том, что любая поверхность воды в спокойном состоянии (в чашке, в ванне, в море) является уровенной поверхностью. Вода всегда растекается так, чтобы ее поверхность была перпендикулярна к направлению силы тяжести.

Геоид – фигура Земли, образованная уровенной поверхностью, совпадающей в открытых морях и океанах с их спокойной поверхностью.



Отвесные линии

Рис. 2.1. Уровенная поверхность

На суше поверхность геоида проходит так, чтобы она являлась продолжением поверхности океана и везде была перпендикулярной отвесным линиям.

Поскольку уровень морей и океанов вследствие приливов и отливов, не говоря уже о волнах, непрерывно меняется, необходимо договориться о том, где же проходит этот «средний уровень моря» (поверхность геоида). В нашей стране за него в качестве начала отсчета высот принят «ноль Кронштадтского футштока» - мерной линейки, установленной в Обводном канале Кронштадта.

Поверхность геоида, в отличие от физической поверхности Земли, гладкая, но тоже довольно неправильная. Если сравнивать с телом еще более правильной формы – эллипсоидом, то геоид имеет и впадины (на юге Индии 160 м, на Кубе 97 м) и выпуклости (в Папуа 120 м, в Западной Африке 136 м).

Таким образом, геоид по форме больше похож не на шар, а на грушу. Разумеется, это утрировано, так как указанные неровности по сравнению с размерами Земли очень малы (рис. 2.2).

Для составления карт все точки на физической поверхности Земли сначала проектируют на геоид. Конечно, и высоту точек желательно измерять относительно поверхности геоида, но тут возникает проблема. Оказывается, что положение поверхности геоида в океанах определить достаточно просто, осреднив уровень океана. Но на суше это сделать невозможно. Геоид и на суше должен проходить перпендикулярно отвесным линиям, но направление отвесных линий внутри материка неизвестно, поскольку неизвестно распределение масс внутри Земли.

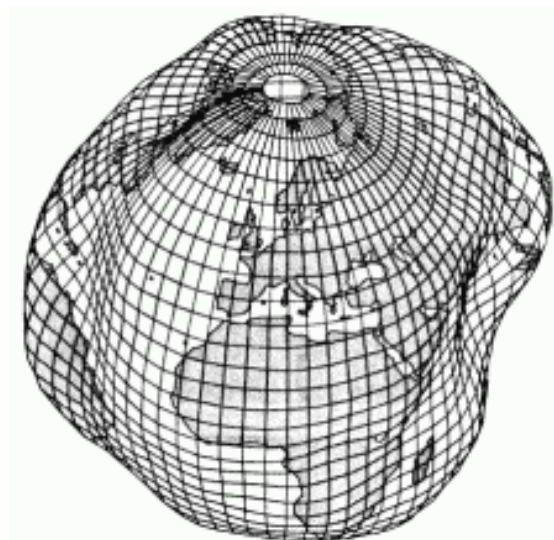


Рис. 2.2. Неровности геоида (преувеличено)

Поэтому вместо поверхности геоида используется поверхность *квазигеоида*. Она совпадает с геоидом в морях и океанах и почти совпадает

на континентах. Предполагается, что в равнинной местности расхождение по высоте составляет до 20 см, а в горах может достигать 2-3 м. Положение поверхности квазигеоида, в отличие от геоида, может быть определено достаточно точно по результатам гравиметрических, геодезических и астрономических съемок. Более подробно данная проблема будет рассмотрена ниже.

Таким образом, на всех картах уровень рельефа местности строго говоря указывается от поверхности квазигеоида. Но практически можно считать и что от поверхности геоида, учитывая незначительную разницу между ними (рис. 2.3.).

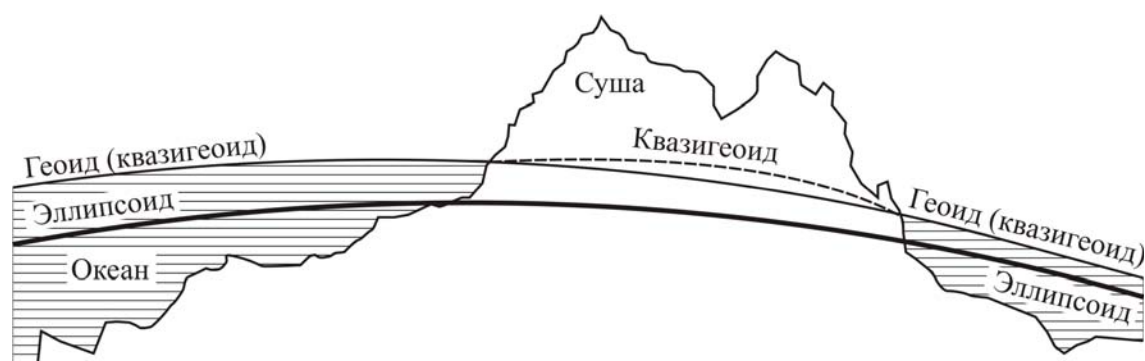


Рис. 2.3. Поверхности геоида, квазигеоида и эллипсоида

Как геоид, так и квазигеоид, не являются телами правильной формы, не имеют простого математического описания и не могут быть использованы для задания системы координат. Землю необходимо еще больше «сгладить». Поэтому для задания на Земле системы координат геоид аппроксимируют *эллипсоидом вращения*, то есть фигурой, образованной путем вращения *эллипса* (плоской фигуры) вокруг малой его оси. Эллипс представляет собой сжатую окружность.

В зависимости от того, какого размера выбран эллипсоид и как он расположен в теле геоида, поверхность эллипсоида может отходить от геоида на десятки и сотни метров. Направление отвесной линии (перпендикуляра к геоиду) не совпадает с направлением нормали (перпендикуляра) к эллипсоиду.

Именно за эллипсоид и принимают Землю и на его поверхности вводят систему координат. Эллипсоид – математически правильное тело, поэтому по координатам точек на эллипсоиде можно по формулам с любой точностью рассчитывать расстояния между ними, направления из одной точки на другую.

Но эллипсоид – достаточно сложная фигура, поэтому расчетные формулы имеют сложный вид. Если же очень высокой точности не требуется, то Землю можно представить еще более простой фигурой – *сферой*, то есть несжатым эллипсоидом. На поверхности сферы расчеты

выполняются не столь точно, но по более простым формулам, хотя и более сложным, чем при расчетах на плоскости. Если же речь идет о расчете расстояний и направлений на ограниченной территории (в пределах нескольких километров), то поверхность Земли в этом районе можно просто принять за плоскость, то есть не учитывать кривизну Земли.

Таким образом, в зависимости от решаемой задачи, требуемой точности и размера охватываемой территории в качестве фигуры Земли можно использовать различные ее модели (аппроксимации):

- физическую поверхность (фактическую фигуру Земли),
- геоид (квазигеоид),
- эллипсоид,
- сферу,
- плоскость.

Земля непрерывно движется. Она вращается вокруг своей оси и одновременно обращается вокруг Солнца по близкой к окружности эллиптической орбите (эксцентриситет 0,01672). Один оборот Земли вокруг своей оси относительно Солнца занимает ровно 24 часа, поскольку по определению один час это 1/24 часть солнечных суток. Относительно звезд Земля совершает оборот вокруг своей оси примерно за 23 ч 56 мин. Это связано с тем, что в течение суток Земля успевает переместиться по своей орбите. Если, например, в некоторый момент направление на Солнце и какую-нибудь звезду совпадало, то через сутки эти направления будут отличаться примерно на 1° .

За счет суточного вращения Земли происходит смена дня и ночи.

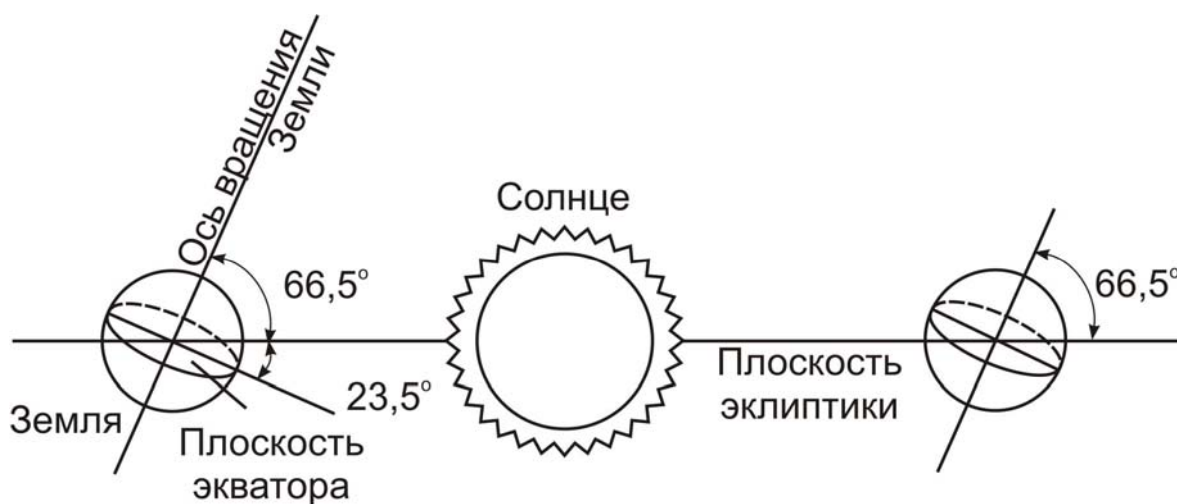


Рис. 2.4. Плоскость эклиптики и ось вращения Земли

Плоскость орбиты Земли называется плоскостью *эклиптики* (рис.2.4). Ось вращения Земли наклонена к плоскости эклиптики примерно на $66^\circ 33'$, а к перпендикуляру к эклиптике, разумеется, на $23^\circ 27'$. Этот угол остается

почти неизменным, поскольку вращающаяся Земля представляет собой гироскоп, который стремится сохранить направление оси вращения постоянным. За счет этого, в зависимости от того северным или южным полушарием Земля обращена к Солнцу, происходит смена времен года. Когда Земля наклонена к Солнцу северным полушарием, солнечные лучи там падают на земную поверхность более отвесно и лучше ее прогревают. В это время в северном полушарии лето. А район вблизи северного полюса остается освещенным круглые сутки (полярный день). В это время в южном полушарии зима, а в районе южного полюса – полярная ночь. Через полгода ситуация меняется на противоположную.

Но земная ось совершает в пространстве медленное конусообразное движение с периодом 26000 лет, называемое *прецессией* (прецессия – дословно предварение), а с периодом 18,67 года – также более мелкие колебания, вызывающие изменение наклона земной оси к эклиптике и называемые *нутацией* (рис.2.5). Причиной этих движений являются эллипсоидальность Земли и неравномерность ее плотности, поскольку выпуклые части Земли притягиваются Солнцем и Луной сильнее.

Из-за прецессии и нутации ось вращения Земли меняет положение в пространстве вместе с телом Земли, то есть ведет себя как качающийся волчок. При этом изменяются координаты небесных светил – ведь система небесных координат связана с осью вращения. Координаты пунктов на земной поверхности, конечно, не изменяются.

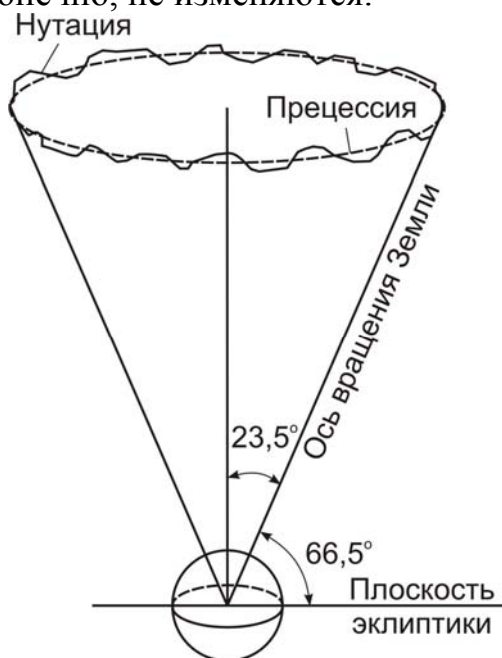


Рис. 2.5. Прецессия и нутация

Но, кроме того, существует и так называемое *движение полюсов*. Полюса – это точки пересечения оси вращения Земли с ее поверхностью. Оказывается, внутри тела Земли *мгновенная ось ее вращения* непрерывно меняет свое положение, следовательно, полюса «гуляют» примерно в

квадрате 20 на 20 м. Это явление вызывает, вообще говоря, изменение мгновенных (то есть не средних, а именно в данный момент времени) координат точек – их широт и долгот, поскольку координатная сетка связана с полюсами. Но это изменение невелико, не превышает 0,3" по широте и долготе.

Международная служба движения полюса IPMS (International Polar Motion Service) еженедельно публикует координаты мгновенного полюса.

На рис.2.6 сплошной линией показано изменение положения *среднего полюса* (осредненного за десятилетний период) в период с 1890 по 2000 г., а пунктиром – траектория перемещения *мгновенного полюса* с 1996 по 2000 г. Расстояния по осям координат указаны в угловых секундах широты.

Вращение Земли вокруг своей оси также неравномерно. За счет приливных сил Солнца и Луны Земля вращается все медленнее и сутки увеличиваются на 0,0014 секунды за 100 лет (по наблюдениям за последние 250 лет). Существуют и сезонные изменения с амплитудой порядка 0,0025 с за 100 лет (зимой Земля вращается быстрее), а также нерегулярные (0,003 с) неизвестной природы. На рис.2.7 показаны отклонения продолжительности суток от еесреднего значения за последние 350 лет.

Предполагается, что основной причиной изменения скорости вращения Земли является изменение ее момента инерции из-за перераспределения водных масс в океанах и воздушных масс в атмосфере.

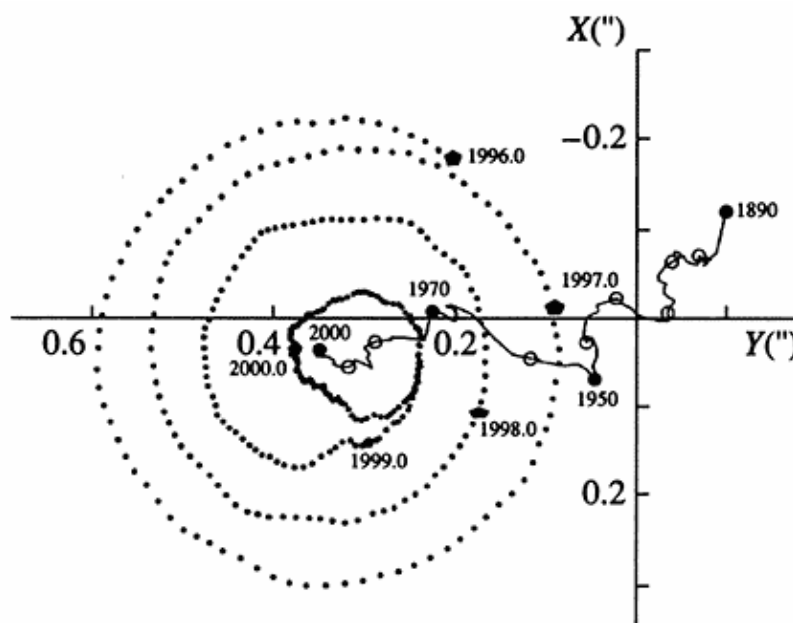


Рис. 2.6. Движение полюсов Земли

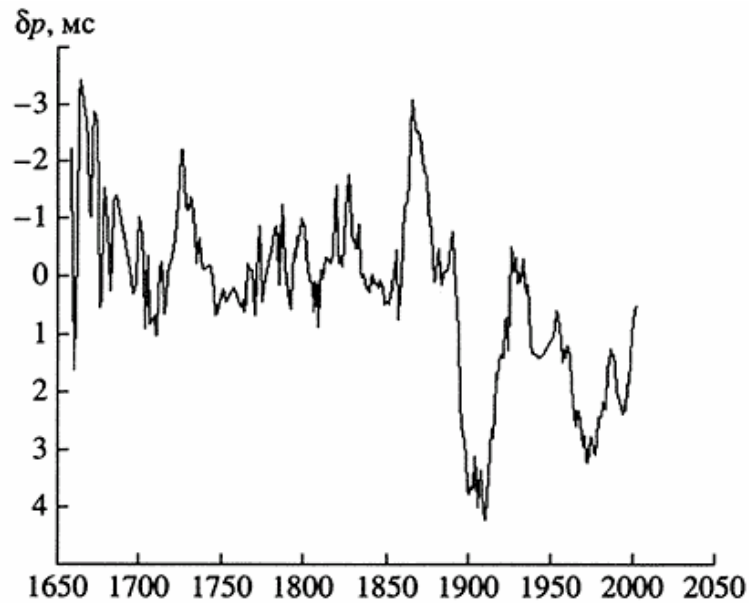


Рис. 2.7. Отклонение продолжительности суток от среднего значения (в миллисекундах)

Изменение скорости вращения нашей планеты отслеживается Международной службой вращения Земли IERS (International Earth Rotation and Reference Service).

2.2. Гравитационное поле Земли

Поскольку форма Земли определяется силой тяжести, ее изучение невозможно без использования гравиметрических данных.

В соответствии с законом всемирного тяготения, открытым И.Ньютоном, две материальные точки с массами m_1 и m_2 притягиваются друг к другу с силой F , пропорциональной этим массам и обратно пропорциональной расстоянию r между ними:

$$F = -f \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где $f = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ – универсальная гравитационная постоянная.

Рассмотрим пробное материальное тело с массой, равной единице. Оно будет притягиваться каждой из бесконечного множества составляющих Землю материальных точек с бесконечно малыми массами dm . Все они находятся на разных расстояниях от пробного тела и в разных направлениях от него.

Результирующая сила, вызванная притяжением всех точек, называется *силой притяжения* $F_{\text{притяж}}$ или *гравитационной силой*. Это вектор, который лишь примерно направлен к центру Земли (то, что мы называем «вниз»), а на самом деле в разных точках Земли он имеет различные величины и

направление из-за неравномерного распределения земных масс и из-за сжатия Земли.

Эта сила может быть рассчитана, если подставить в приведенную формулу в качестве одной из масс массу Земли ($m_{зем} = 5,976 \cdot 10^{24}$ кг).

Но на каждую материальную точку действует также *центробежная сила* $F_{цен}$, вызванная вращением Земли:

$$F_{цен} = \rho \omega_{зем}^2 m ,$$

где ρ – расстояние точки от оси вращения Земли (радиус параллели),
 $\omega_{зем} = 7,27 \cdot 10^{-5}$ 1/с – угловая скорость вращения Земли (360° за 24 часа, т.е. 15° в час),

m – масса материальной точки.

Центробежная сила направлена в сторону от оси вращения, перпендикулярно к ней, то есть, параллельно экватору. Очевидно, что чем ближе к экватору, тем больше радиус вращения и тем больше величина центробежной силы.

Векторная сумма силы притяжения и центробежной силы называется *силой тяжести* (рис. 2.8):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{притяж} + \mathbf{F}_{цен}.$$

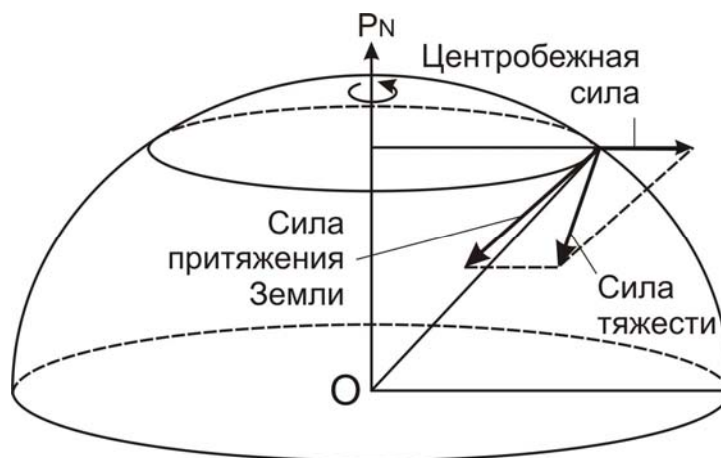


Рис. 2.8 . Сила тяжести

Направление этой силы в каждой точке Земли – это и есть направление отвесной линии в данной точке. Оно также различно в разных точках, как из-за неравномерности распределения земных масс, так и из-за разного значения центробежной силы.

В каждой точке гравитационное поле (поле силы тяжести) характеризуется его *напряженностью*, равной величине силы, действующей на единичную массу. Очевидно, что напряженность можно рассчитать, разделив силу, действующую на тело, на массу этого тела: F/m . Но в соответствии со вторым законом Ньютона (сила равна произведению массы

на ускорение) эта величина и будет равна ускорению, которое сила тяжести придаст данному телу.

$$F = mg, \quad g = F/m.$$

Таким образом, ускорение свободного падения g как векторная величина (имеет модуль и направление) характеризует напряженность гравитационного поля.

Если принять массу тела равной единице («пробная масса»), то ускорение свободного падения будет численно равно действующей на эту массу силе. Поэтому в гравиметрии ускорение g принято называть «силой тяжести», что на самом деле не вполне корректно.

В системе СИ размерность ускорения есть м/с^2 . В гравиметрии все еще распространена более старая единица – *гал*. Среднее значение ускорения свободного падения g на всей поверхности Земли составляет

$$g = 9,80665 \text{ м/с}^2 = 980,665 \text{ гал}.$$

Но из-за сжатия Земли и ее вращения величина g на разных широтах различна. Больше всего она на полюсах, а меньше всего – на экваторе. Поэтому любые маятниковые часы в полярных районах идут быстрее (спешат) по сравнению с такими же часами на экваторе. Ведь период колебаний маятника зависит от величины ускорения свободного падения.

Величина центробежной силы гораздо меньше, чем силы притяжения. Даже на экваторе, где она максимальна, вызванное ею ускорение составляет всего 3,4 *гал*.

Уменьшается величина g и с увеличением высоты, то есть расстояния до притягивающих пробное тело точек.

Предложены различные формулы, позволяющие рассчитать среднее значение g на какой либо широте и высоте, например:

$$g = 978,049 \times (1 + 0,0052884 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi) - 0,0003086 H,$$

где φ – широта точки; H - высота в метрах, g – ускорение свободного падения в галах.

Разумеется, речь идет о не очень больших высотах и о средних значениях g , не учитывающих местные неравномерности распределения земных масс, вызывающие отклонения отвесных линий и изменение g на уровне моря.

Важным для описания гравитационного поля является понятие его *потенциала*, которое связано с работой, выполняемой силой тяжести. В соответствии с элементарной физикой работа – это произведение силы F на расстояние S , на которое перемещено тело этой силой, и на косинус угла α между направлением силы и направлением перемещения:

$$W = F S \cos \alpha.$$

Потенциал гравитационного поля в данной точке – это работа, которую должна выполнить сила тяжести, чтобы переместить единичную массу из бесконечно удаленной точки в данную точку пространства. Но можно сказать и наоборот – это работа, которую мы должны выполнить против силы тяжести, чтобы переместить пробную единичную массу из данной точки в бесконечность.

При перемещении из одной точки в другую приращение потенциала равно работе, совершаемой при этом силой тяжести над единичной массой.

Приведенная выше формула для величины работы является упрощенной. В общем случае, учитывая, что величина силы в процессе перемещения может изменяться, работа определяется как интеграл от силы по направлению перемещения. Поскольку сила тяжести по мере удаления от притягивающего тела уменьшается в соответствии с законом всемирного тяготения пропорционально квадрату расстояния, то и уменьшение потенциала является нелинейным. Но, конечно, в среднем, чем дальше точка от центра Земли, тем меньше в ней потенциал.

Работа пропорциональна косинусу угла между направлением силы и направлением перемещения. Отсюда следует, что при перемещении пробной материальной точки в направлении перпендикулярном силе, работа не производится ($\cos 90^\circ = 0$) и потенциал не изменяется. Через любую точку можно провести поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал. Такую поверхность называют *экипотенциальной поверхностью*. Очевидно, что во всех точках она перпендикулярна силе тяжести, то есть направлению отвесной линии. Таким образом, *экипотенциальная поверхность это и есть уровенная поверхность*. Это ее другое название.

Когда мы устанавливаем какой либо прибор или плотничий уровень с помощью пузырьков горизонтально, мы фактически устанавливаем его по направлению уровенной (экипотенциальной) поверхности в данной точке, точнее – по касательной к ней. Соответственно, вертикальным направлением мы называем направление перпендикуляра к уровенной поверхности, то есть направление отвесной линии.

Экипотенциальных (уровенных) поверхностей бесконечно много – ведь они могут быть проведены через любую точку. Они никогда не пересекаются друг с другом, но расстояние между соседними поверхностями может увеличиваться и ли уменьшаться при перемещении в другое место Земли. Та из этих поверхностей, на которой потенциал равен потенциалу на среднем уровне моря, и получила название *геоида*.

При перемещении с одной экипотенциальной поверхности на другую перпендикулярно к ним величина потенциала изменяется. Поскольку приращение потенциала (работа) является интегралом от силы, то и наоборот - производная потенциала по этому направлению, то есть скорость его изменения, равна силе тяжести, действующей на тело единичной массы.

А эта сила, как сказано выше, численно равна ускорению свободного падения g в данном месте.

Таким образом, эквипотенциальная (уровенная) поверхность вовсе не является геометрическим местом точек с одинаковым значением g , как иногда думают. Наоборот, величина g является производной от потенциала. Следовательно, чем больше g , тем «гуще» расположены эквипотенциальные поверхности в данном месте.

Для детального изучения гравитационного поля земли с учетом его региональных и местных аномалий проводится *гравиметрическая съемка*, то есть измерение ускорения свободного падения в различных точках планеты. Для таких измерений используются гравиметры, маятниковые приборы, гравитационные вариометры и другие устройства. Например, *гравиметр* - это прибор для относительного измерения ускорения силы тяжести, то есть определения величины его изменения в разных точках. Гравиметр представляет собой точные пружинные или крутильные весы, которые измеряют разности ускорений силы тяжести по изменению деформации пружины или угла закручивания упругой нити, компенсирующих силу тяжести небольшого грузика. Измерения проводятся последовательно на исходном пункте, для которого ускорение силы тяжести известно, и на исследуемом пункте. Точность измерения достаточно высока – 10^{-7} м/с^2 и точнее. Для сравнения: если бы неподвижное тело начало перемещаться с таким ускорением, то за две минуты оно сдвинулось бы меньше, чем на миллиметр, а до скорости пешехода разогналось бы примерно через четыре месяца.

С изобретением маятниковых приборов, позволяющих измерять g , находясь на подвижном основании (например, на палубе корабля), стало возможным проводить гравиметрическую съемку в морских районах.

Гравитационные вариометры предназначены для измерения второй производной потенциала силы тяжести, которая характеризует кривизну уровенной (эквипотенциальной) поверхности и вертикальный градиент g , то есть скорость изменения ускорения свободного падения с высотой.

Исходным пунктом мировой геодезической сети является гравиметрический пункт в г.Потсдам (Германия), где еще в начале XX века были проведены точные измерения абсолютной величины g . Каждая страна имеет свой исходный пункт, связанный с потсдамским пунктом. Все эти пункты вместе образуют так называемую потсдамскую систему.

Внутри каждой страны создается высокоточная сеть опорных пунктов, связанных с национальным исходным пунктом, а уже относительно нее строятся местные опорные сети для проведения отдельных гравиметрических съемок.

Тысячи гравиметрических пунктов покрывают нашу планету неравномерно. Конечно, больше всего измерений проведено в Европе, Северной Америке. Меньше – в Африке, Азии. Еще меньше в Антарктиде, в районах океанов. В последние десятилетия для изучения гравитационного

поля широко используются и искусственные спутники Земли. В соответствии с законами небесной механики, спутники имеют эллиптические орбиты, форма и расположение которых описывается шестью параметрами. Неправильная форма геоида вызывает возмущения орбит спутников, то есть изменения параметров этих орбит с течением времени. Изучая эти возмущения можно судить о параметрах гравитационного поля в разных регионах, о форме геоида.

Для решения многих задач навигации и геофизики необходимо иметь *математическую модель гравитационного поля Земли*, то есть формулы и коэффициенты, с помощью которых можно рассчитать параметры поля в любой точке с необходимой точностью.

Величина центробежной силы, возникающей из-за вращения планеты, и создаваемое ею ускорение могут быть легко рассчитаны для любой точки. Поэтому наиболее важным и сложным является определение потенциала V , соответствующего силе притяжения (гравитационной силе). С использованием сферических функций этот потенциал для любой точки может быть рассчитан и следующим образом:

$$V(\varphi, \lambda, \rho) = \frac{f m_{зем}}{\rho} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{\rho} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_n^m(\sin \varphi) \right],$$

где

φ, λ – широта и долгота точки, в которой рассчитывается потенциал,

ρ – расстояние точки от центра Земли,

C_{nm} и S_{nm} – коэффициенты, зависящие от фигуры Земли и распределения в ней масс (определяются на основе измерения g в различных точках планеты),

f – универсальная гравитационная постоянная,

$m_{зем}$ – масса Земли,

a – большая полуось Земли.

Выражение, стоящее перед квадратной скобкой, определяет потенциал, который имела бы Земля в форме шара. Коэффициент второй степени нулевого порядка $C_{2,0}$ отражает изменение потенциала за счет сжатия Земли. Остальные коэффициенты (они значительно меньше по величине) характеризуют детали фигуры и строения Земли.

Если все коэффициенты в приведенной формуле, кроме $C_{2,0}$, принять равными нулю, то формула превратится в уравнение эллипсоида, являющегося эквипотенциальной (уровенной) поверхностью. Можно подобрать такое значение $C_{2,0}$, чтобы потенциал на поверхности этого уровенного эллипсоида (с учетом потенциала центробежной силы) был как можно ближе к потенциалам, экспериментально измеренным в разных точках планеты. Такой уровенный эллипсоид, в гравитационном смысле

заменяющий «неправильную» Землю, называют *нормальной Землей*, а потенциал на его поверхности – *нормальным потенциалом* U_0 .

Используемая в формуле функция $P_n^m(\sin \varphi)$ называется присоединенной (ассоциативной) функцией Лежандра степени n и порядка m . Она определяется формулой:

$$P_n^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m},$$

где $P_n(x)$ – так называемые полиномы Лежандра, которые в свою очередь могут быть рассчитаны по формуле Родрига:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

Чем выше степень n и порядок m коэффициентов, используемых в модели гравитационного поля, тем более точно она его описывает, тем больше факторов учитывает.

Широко распространена модель EGM 96 ((EGM – Earth Geopotential Model) степени и порядка 360, разработанная NASA, NGA и Техническим университетом штата Огайо. В 2008 г. разработана более полная версия модели – EGM 2008 степени 2190 и порядка 2159. Используются и более простые модели. Например, для расчета волны геоида над эллипсоидом WGS-84 используется модель степени и порядка 180.

2.3. Магнитное поле Земли

Большинство планет солнечной системы в той или иной степени обладают магнитным полем. Имеется оно и у Земли.

Общепризнанной теории, объясняющей наличие у Земли магнитного поля, не существует. Многие ученые считают, что жидкая металлическая оболочка ядра Земли, расплавленная под воздействием высокой температуры, перемещается вследствие вращения Земли и конвекции, переносящей тепло от ядра к поверхности. В перемещающихся металлических массах возникает электрический ток, который и является причиной возникновения магнитного поля.

Интенсивность магнитного поля можно количественно характеризовать либо его напряженностью, либо величиной магнитной индукции. *Напряженность магнитного поля* T характеризует силу, с которой магнитное поле действует на помещенный в него пробный магнит. Это вектор, направленный по касательной к магнитной силовой линии в данной точке.

Модуль этого вектора по системе СИ измеряется в *амперах на метр* (А/м), но в литературе по геофизике чаще используются единицы

измерения в старых системах: *эрстед* (Э) и *гамма* (γ). Соотношение между этими единицами следующее:

$$1 \text{ Э} = 79,6 \text{ А/м}, \quad 1 \gamma = 10^{-5} \text{ Э}.$$

Гамма является просто более мелкой единицей измерения по сравнению с эрстедом и, следовательно, более удобной для описания магнитного поля Земли, поскольку напряженность его невелика.

Магнитная индукция B характеризует импульс напряжения, индуцируемый в пробном соленоиде (катушке) при помещении его в магнитное поле. Единицей измерения индукции является *Тесла* (Тл).

$$1 \text{ Тл} = 1 \text{ В} \cdot \text{с/м}^2.$$

Напряженность и индукция векторные величины. В вакууме их направления совпадают, а модули связаны простым соотношением:

$$B = \mu_0 T,$$

где $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ В} \cdot \text{с/А} \cdot \text{м}$ – магнитная постоянная.

Используя приведенные соотношения нетрудно убедиться, что индукции в 1 Тл соответствует напряженность примерно $10\,000 \text{ Э}$, а напряженности в 1 гамма – индукция в $10^{-9} \text{ Тл} = 1 \text{ нанотесла}$.

Напряженность магнитного поля Земли невелика. В разных точках планеты она не превышает $0,6 \dots 0,7 \text{ Э}$, а на территории России в среднем составляет $0,2 \dots 0,4 \text{ Э}$. Для сравнения можно заметить, что самый сильный современный (на 2009 г.) электромагнит, построенный на высокотемпературных сверхпроводниках, создает индукцию $26,8 \text{ Тл}$, что соответствует напряженности $267\,847 \text{ Э}$.

Направленный по касательной к магнитным силовым линиям вектор напряженности T в общем случае не лежит в плоскости горизонта и не совпадает с плоскостью географического меридиана. Если разместить в любой точке O начало прямоугольной системы координат и направить ось OX по меридиану на север, ось OY перпендикулярно к ней на восток, а ось OZ направить вниз, то вектор T можно разложить на горизонтальную составляющую H и вертикальную Z (рис. 2.9).

Направление горизонтальной составляющей H является очень важным для аэронавигации, так как это направление и называется *северным направлением магнитного меридиана* в данной точке. Очевидно, что угол между осью OX (направлением истинного меридиана) и направлением вектора H (направлением магнитного меридиана), есть не что иное, как магнитное склонение ΔM в данной точке.

Угол θ между горизонтальной плоскостью и направлением вектора напряженности T называется *магнитным наклоением*. Наклонение

считается положительным, если вектор $\vec{T}$ отклонен от горизонтальной плоскости вниз.

В литературе по геофизике, в отличие от навигации, магнитное склонение принято обозначать буквой D (от слова declination), а магнитное наклонение – I (от слова inclination).

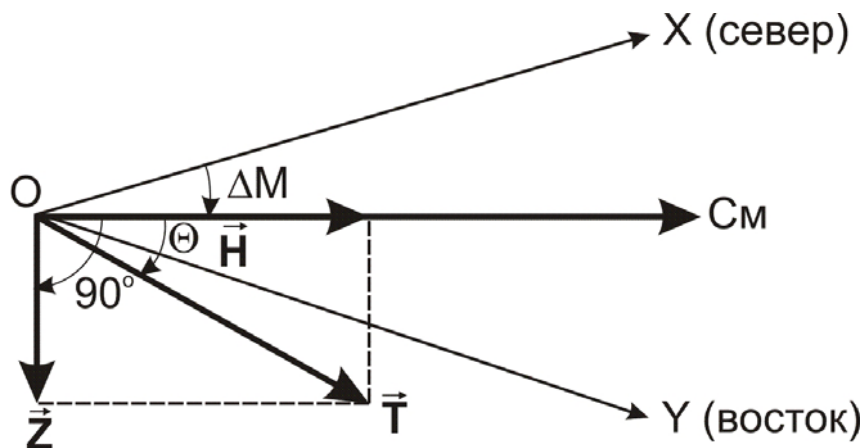


Рис.2.9. Элементы земного магнетизма

В свою очередь горизонтальную составляющую напряженности H также можно разложить на составляющую по меридиану X и составляющую по параллели Y . Нетрудно записать соотношения между перечисленными величинами, называемыми элементами земного магнетизма:

$$H = T \cos \theta; \quad Z = T \sin \theta; \quad X = H \cos \Delta M; \quad Y = H \sin \Delta M; \\ \operatorname{tg} \Delta M = Y/X; \quad \cos \theta = H/T.$$

Магнитные силовые линии выходят из одного магнитного полюса Земли и входят в другой (рис. 2.10).

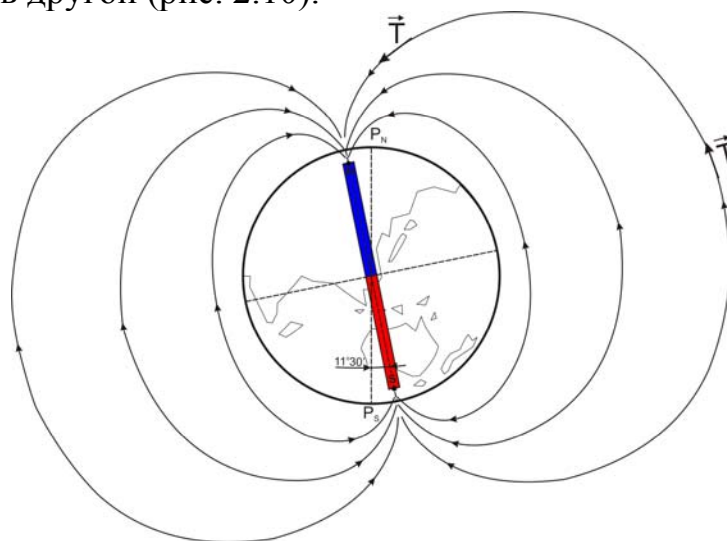


Рис.2.10 Поле диполя

Из рис. 2.10 понятно, что в тех местах, где вектор $\mathbf{T}$ расположен горизонтально (в экваториальных районах) наклонение θ и вертикальная составляющая напряженности $\mathbf{Z}$ равны нулю. В полярных районах, где вектор $\mathbf{T}$ круто наклонен к горизонту (вниз или вверх), наклонение θ близко к $\pm 90^\circ$, а горизонтальная составляющая напряженности $\mathbf{H}$ мала. Это имеет важное значение для аэронавигации, поскольку магнитные компасы реагируют именно на горизонтальную составляющую. И, если она мала, компас будет работать неустойчиво.

Магнитное поле Земли имеет более сложную структуру, чем это изображено на рис. 2.10. В нем можно выделить несколько составляющих: поле диполя, материковое поле, аномальное поле и поле вариаций.

Поле диполя, или иначе – *поле однородного намагничивания*, является основной частью магнитного поля Земли и составляет от него примерно 70%. Диполем в физике называют совокупность двух фиктивных магнитных зарядов разного знака, расположенных на некотором расстоянии друг от друга. Обычно его изображают в виде линейного магнита (с красным и синим концами), как это изображено на рис. 2.10. Можно считать, что внутри Земли находится огромный магнит, который и создает поле диполя. Но ось диполя не совпадает с осью вращения Земли, а составляет с ней примерно $11,5^\circ$. Две точки, в которых ось диполя пересекает поверхность Земли, называют *геомагнитными полюсами*. Тот из них, который расположен в северном полушарии, называют северным геомагнитным полюсом, а тот, который находится в южном полушарии – южным. Интересно, что с точки зрения физики все обстоит как раз наоборот: в северном полушарии Земли находится тот полюс магнита, который на самом деле является южным.

Если бы Земля имела только поле диполя, то все было бы довольно просто. Каждая силовая линия поля лежала бы в одной плоскости, проходящей через геомагнитные полюсы, и, следовательно, в каждой точке горизонтальная составляющая напряженности $\mathbf{H}$ была бы направлена к геомагнитному полюсу. В этом случае величину магнитного склонения можно было бы рассчитать математически по координатам точки.

Но на поле диполя накладывается другая составляющая магнитного поля Земли – так называемое *материковое поле*. Оно вызвано намагниченными породами в земной коре континентов и искажает поле диполя в разных регионах Земли по-разному. Отклонения, вызванные материковым полем иногда называют мировыми *аномалиями* (Восточно-Сибирская, Бразильская аномалии и т.д.). Материковое поле составляет около 20% от общего и вызывает искривление магнитных силовых линий.

Раздел геофизики, изучающий структуру магнитного поля Земли, называется геомагнетизмом. В магнитных обсерваториях разных стран с помощью магнитометров и магнитографов проводятся постоянные измерения элементов земного магнетизма в различных точках планеты. На основе этих измерений составляют карты магнитного поля, на которых нанесены линии с одинаковым значением какого-либо элемента (изолинии).

Линии, соединяющие точки с одинаковыми значениями магнитного склонения ΔM называются *изогоны*. Изогоны сходятся в четырех точках: в географических и в магнитных полюсах. Изогону, соответствующую нулевому магнитному склонению, называют *агонической линией*.

Линии, соответствующие постоянному магнитному наклонению – *изоклины*. Изоклина, соответствующая нулевому наклонению, условно называется *магнитным экватором*. Точки, в которых магнитное наклонение составляет $+90^\circ$ или -90° , то есть, в которых вектор $\mathbf{T}$ расположен перпендикулярно к горизонту, называются *магнитными полюсами*. Из-за искажения поля диполя материковым полем магнитные полюса не совпадают с геомагнитными. Мало того, из-за местных аномалий магнитных полюсов может быть несколько.

А линии с одинаковым значением напряженности T (или индукции B) поля, или их составляющих (X , Y или Z) называются *изодинамы*. На рис.2.11-2.14 приведены карты магнитного поля для некоторых элементов земного магнетизма. Можно видеть, что они значительно искривлены.

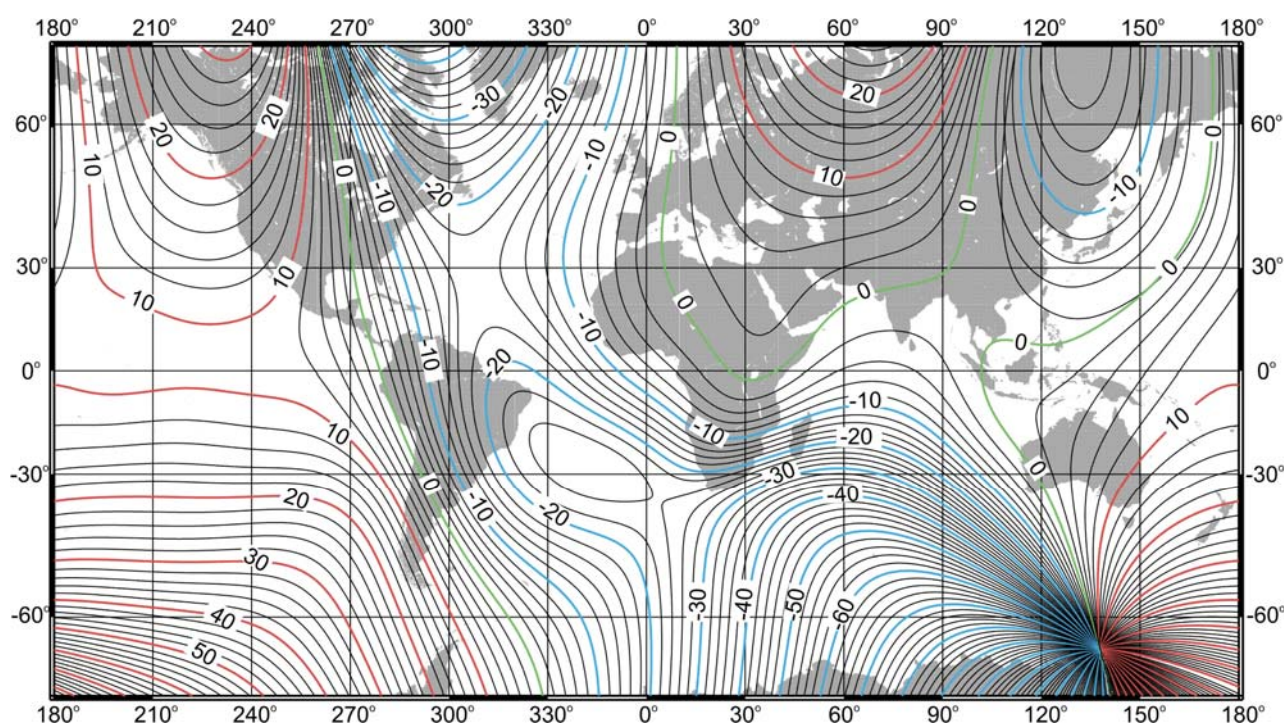


Рис. 2.11. Карта изогон
(значения магнитного склонения указаны в градусах)

Сумму поля однородного намагничивания (поля диполя) и материкового поля иногда называют *нормальным полем*. Оно является относительно стабильным, но все же медленно меняется. Скорость изменения каждого элемента земного магнетизма в разных местах планеты различна. Соответственно меняется и форма изолиний на картах. Например,

в аэропорту Пулково 1 января 2010 г магнитное склонение составляло $9^{\circ}21'$ и увеличивалось со скоростью $7'$ в год. Но вполне возможно, что в будущем оно будет уменьшаться. Величину изменения земного магнетизма в данной точке в течение года называют *вековым ходом* этого элемента (магнитного склонения, напряженности и т.д.).

Отсюда следует, что при использовании аэронавигационных карт с нанесенными на них изогонами, следует обращать внимание на то, к какому году (или, как говорят, к какой эпохе) относятся данные о магнитном склонении. Ведь на день полета они могут существенно устареть.

Существуют специальные карты, на которых нанесены линии (*изопоры*), соединяющие точки с одинаковым вековым ходом какого-либо элемента земного магнетизма. С их помощью можно более точно определить значение этого элемента на какую-либо дату.

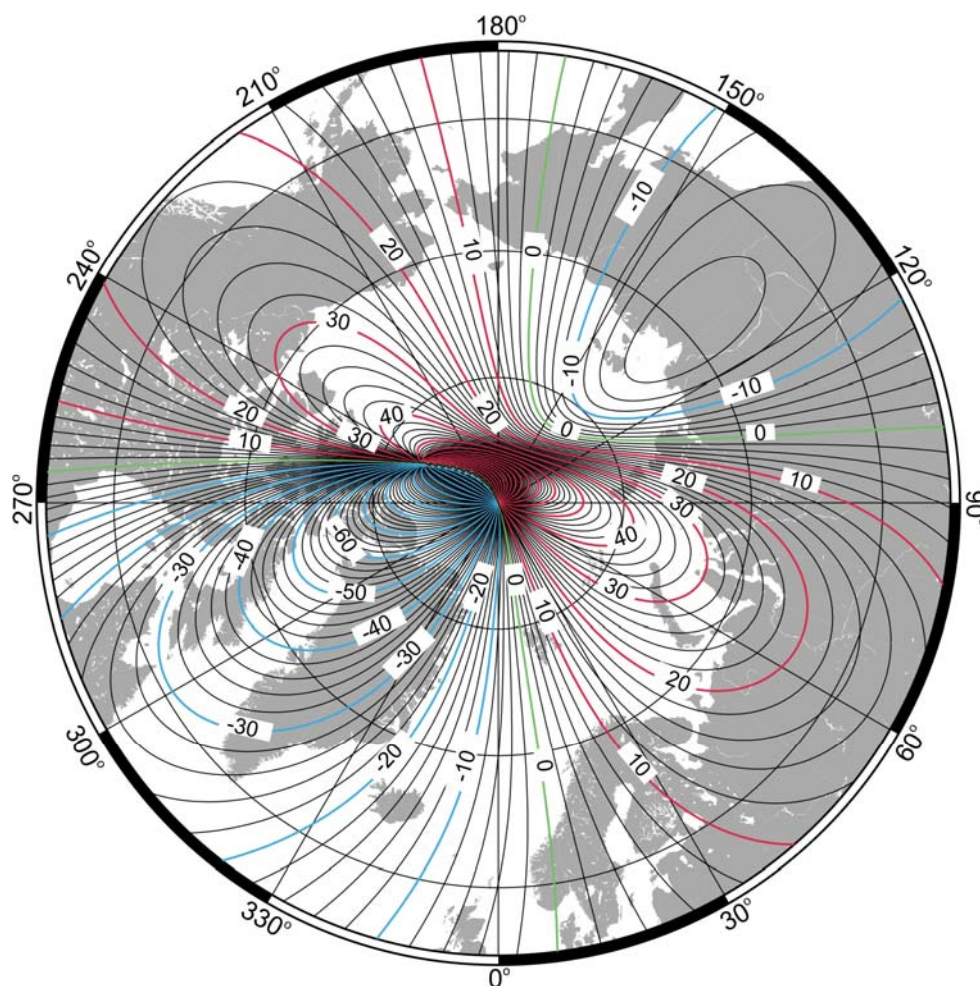


Рис. 2.12. Карта изогон северной полярной области Земли
(значения магнитного склонения указаны в градусах)

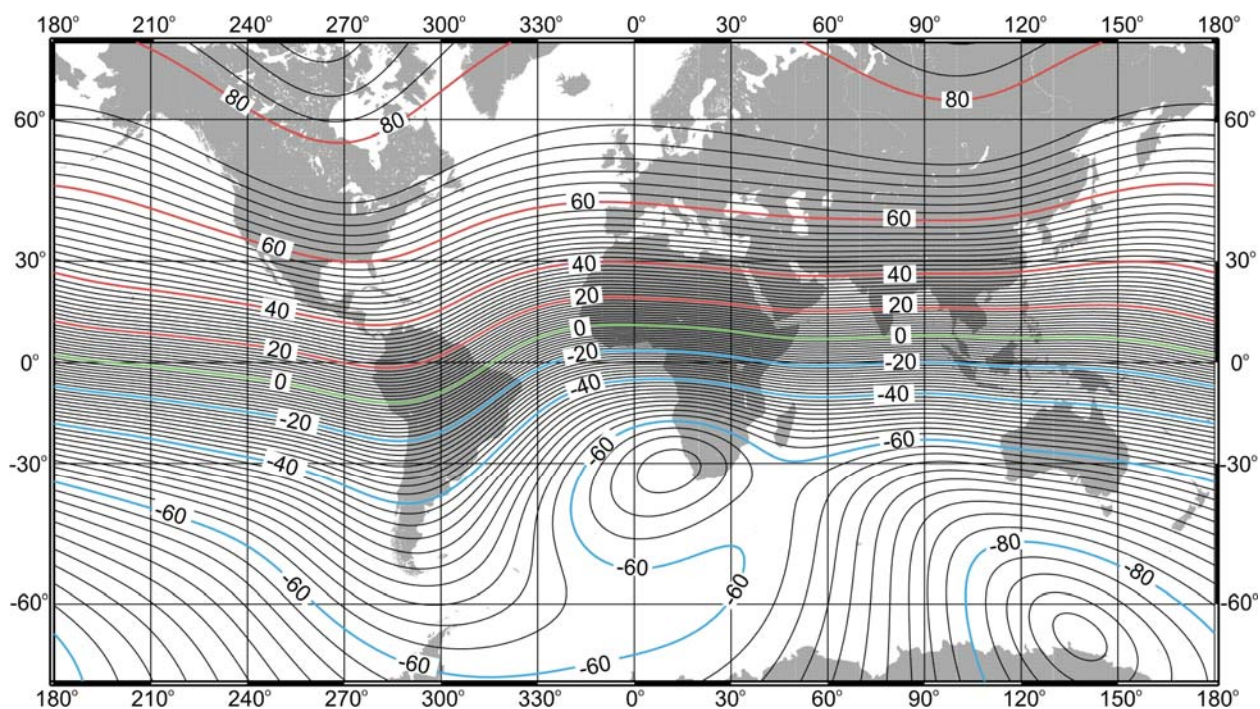


Рис. 2.13. . Карта изоклин (значения магнитного наклонения указаны в градусах)

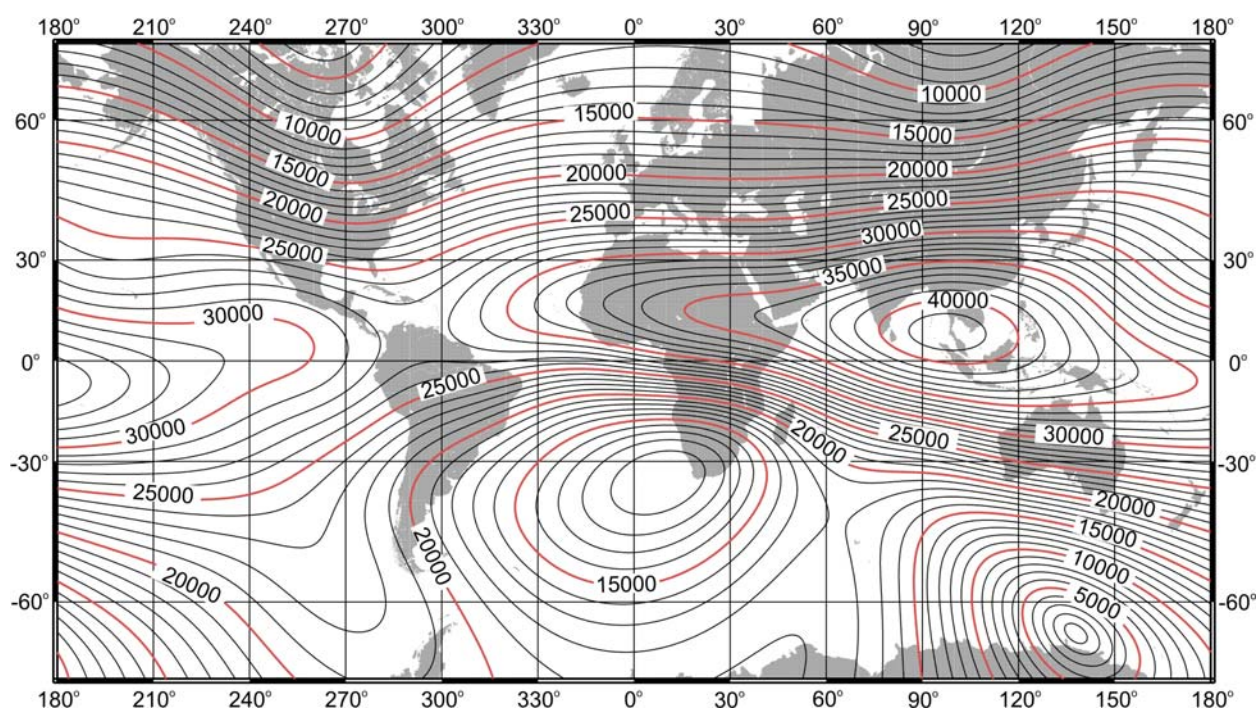


Рис. 2.14. Карта изодинам горизонтальной составляющей магнитного поля Земли (значения индукции указаны в нанотеслах)

Аномальное магнитное поле Земли накладывается на нормальное поле и вызывает его искажения в некоторых районах планеты. Эти районы называют районами *магнитных аномалий* (слово аномалия означает отклонение). Аномалии, охватывающие десятки и сотни километров, называют региональными, а более мелкие – локальными (местными). Они, как правило, вызваны намагниченными горными породами (например, железной рудой), располагающимися в земной коре.

В районах магнитных аномалий элементы земного магнетизма могут сильно отличаться от их значений на прилегающей территории и быстро меняться при перемещении по территории района. В районе Курской магнитной аномалии, открытой еще в XVIII веке, магнитное склонение изменяется в пределах $\pm 180^\circ$, тогда как его нормальное значение составляет всего несколько градусов. Большого значения достигает здесь и вертикальная составляющая поля. На территории России также примечательна Ангаро-Илимская аномалия, в районе которой даже магнитное наклонение имеет противоположный знак. Северный конец магнитной стрелки отклоняется не вниз, как в прилегающих к аномалии районах, а вверх. Сильные аномалии имеются и в других местах планеты.

В районах магнитных аномалий изолинии становятся очень извилистыми, могут быть замкнутыми, а иногда их вообще трудно провести. В этих случаях на аэронавигационных картах просто указывают, что в данном районе магнитное склонение меняется от столько-то до столько-то градусов.

Но влияние магнитных аномалий сказывается лишь до высоты 3-4 тысячи метров. Поэтому на маршрутных картах, предназначенных для полетов на средних и больших высотах, изогоны не имеют резких изгибов.

Самая изменчивая составляющая магнитного поля Земли – *поле вариаций*. Даже в течение суток все элементы земного магнетизма несколько изменяются. Например, магнитное склонение меняется с амплитудой порядка $15-20'$, то есть ΔM в одной и той же точке утром и вечером различно. Такие изменения вызваны процессами, протекающими в ионосфере Земли под влиянием Солнца (солнечно-суточные вариации). Ультрафиолетовые лучи ионизируют верхние слои атмосферы, то есть создают электрически заряженные частицы. Вследствие приливных и тепловых процессов ионосферные слои непрерывно движутся, а движение заряженных частиц представляет собой электрический ток, который создает дополнительное магнитное поле.

Обнаружены также лунно-суточные вариации и непериодические вариации неизвестной природы.

Время от времени магнитное поле Земли претерпевает серьезные возмущения – *магнитные бури*. Их причиной является Солнце, которое в период своей активности (возрастания количества пятен) выбрасывает мощные потоки заряженных частиц. Примерно через два дня они достигают Земли и захватываются ее магнитным полем. Вокруг планеты на несколько

дней образуется гигантский водоворот заряженных частиц, создающий свое магнитное поле. Наиболее сильно оно проявляется в полярных районах, где заряженные частицы, двигаясь по силовым линиям, входят в атмосферу и ионизируют ее атомы. Вызванное этим свечение верхних слоев атмосферы мы называем полярным сиянием.

Во время магнитных бурь изменения напряженности магнитного поля в средних широтах составляют до тысячи гамм. Магнитные компасы могут давать значительные погрешности, ухудшается прохождение радиоволн, что ведет к перебоям радиосвязи и нарушению работы радионавигационных средств. Сильные магнитные бури могут даже повреждать электрические сети. Неоднократно отмечались случаи, когда целые регионы оставались без электроснабжения из-за сгорания трансформаторов и других электрических устройств. Один из таких случаев имел место 15.05.2005 г. в США.

Человечество стало изучать земной магнетизм сравнительно недавно. Правда, еще китайцы в XII веке знали, что магнитная стрелка неточно показывает на север, но не придавали этому значения, поскольку отклонение было невелико. Но Христофор Колумб (1492 г.) не мог не обратить внимание на изменение магнитного склонения, поскольку в плавании через Атлантический океан за четыре дня магнитная стрелка отклонилась на 11° .

Первую карту магнитного склонения для Атлантики создал в 1701 г. английский ученый Э.Галлей (в его честь названа открытая им одна из самых ярких комет). Впоследствии магнитное поле Земли изучали многие видные ученые, в том числе Л.Эйлер, М.Ломоносов, К.Гаусс.

В последние десятилетия развивается и такое направление исследований как *палеомагнетизм*, позволяющее определить, каким было магнитное поле Земли тысячи и миллионы лет назад. Оно основано на том, что минералы и горные породы при нагревании выше определенной температуры (точки Кюри) теряют способность намагничиваться. И наоборот, если расплавленная в недрах Земли магма застывает, то она сохраняет ту намагниченность, которая была создана магнитным полем Земли в момент застывания. Таким образом, изучая намагниченность древних пород, можно судить о величине и направленности магнитного поля Земли в разных ее точках в древние времена. Эти исследования позволили установить, что на протяжении миллионов лет магнитное поле Земли неоднократно менялось коренным образом. Мало того, что геомагнитные полюсы перемещаются по поверхности планеты, описывая сложные траектории, но еще каждые 200-250 тысяч лет северный и южный полюсы меняются местами. Такая инверсия (переворот) протекает за несколько сотен или тысяч лет. Полюсы начинают перемещаться быстрее, двигаясь в сторону экватора, напряженность поля уменьшается в десятки раз, а какое-то время, возможно, вообще отсутствует. Затем вновь появляется, но уже с противоположной направленностью.

Последний раз такое явление произошло слишком давно - 720-780 тысяч лет назад. Следовательно, в ближайшее время (в течение полутора-

двух тысяч лет) весьма вероятна очередная инверсия. И, похоже, признаки ее начинают проявляться. Напряженность магнитного поля Земли убывает уже на протяжении последних 2,5 тысяч лет, а в последние десятилетия ее падение стало очень резким. Также значительно возросла скорость перемещения магнитных полюсов. Если в момент открытия в 1931 г. северного геомагнитного полюса он перемещался со скоростью 10 км в год, то сейчас эта скорость достигает 40 км. Этот полюс движется из Канады к территории Сибири. Кроме того, по результатам наблюдений со спутников, в районе Южной Атлантики магнитное поле приобрело необычную структуру – силовые линии как бы направлены в противоположную сторону. Некоторые ученые считают, что именно так должна начинаться инверсия. А ее результаты могут быть печальными. То, что в период временного исчезновения поля перестанут работать магнитные компасы и нарушится радиосвязь – это полбеда. Хуже то, что исчезнет удерживаемый магнитным полем озоновый слой, защищающий нашу планету от смертельно опасного жесткого космического излучения. В Южной Атлантике этот слой уже значительно истончился.

Не все ученые смотрят в перспективу столь пессимистично. Ведь инверсии поля уже многократно случались в прошлом, а жизнь на Земле все же существует. Но, с другой стороны, динозавры ведь отчего-то вымерли...

Несмотря на то, что магнитное поле Земли имеет сложную и неправильную структуру, предпринимаются попытки описать его математически. Разработана международная математическая модель этого поля (IGRF - The International Geomagnetic Reference Field), то есть, формулы, позволяющие рассчитать все элементы земного магнетизма для любой точки на любую дату. Каждые пять лет эта модель уточняется. На период с 2005 до 2010 г. действует 10-ое поколение этой модели. Составляющие эту модель формулы включают в себя более двух тысяч численных коэффициентов, благодаря чему точность расчета составляющих вектора магнитной индукции составляет порядка 0,1 нанотесла. Существуют и упрощенные, менее точные модели, с меньшим количеством коэффициентов. Реализующие их компьютерные программы можно найти в интернете.

Аналогичные математические модели магнитного поля используются и на современных воздушных судах. Инерциальная навигационная система на борту современного воздушного судна непрерывно измеряет истинный курс и считает место самолета. Рассчитанные с помощью модели поля значения магнитного склонения занесены в память бортового компьютера. Зная широту и долготу места самолета можно определить ΔM в данной точке и использовать его, например, для расчета магнитного курса по известному значению истинного. В этом случае отпадает необходимость измерять магнитный курс с помощью чувствительного элемента магнитного компаса (индукционного датчика).

3. ЗЕМНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

3.1. Прямоугольные системы координат

Прямоугольные системы координат – это обычные декартовы системы, имеющие три перпендикулярных оси (X , Y , Z). Они используются для описания положения точек в пространстве, на поверхности или внутри Земли. Если начало (точка пересечения трех осей) прямоугольной системы координат расположено в центре масс Земли, то ее называют *геоцентрической*, а если в центре аппроксимирующего Землю эллипсоида – то *референцной*.

Системы координат, начало которых находится на поверхности Земли, называют *топоцентрическими*. Топоцентрические системы используются для определения положения точек на небольшой территории, в пределах которой кривизной Земли можно пренебречь. Например, координаты препятствий в районе аэродрома предоставляются в топоцентрической системе, начало которой расположено в точке пересечения осевой линии и порога ВПП.

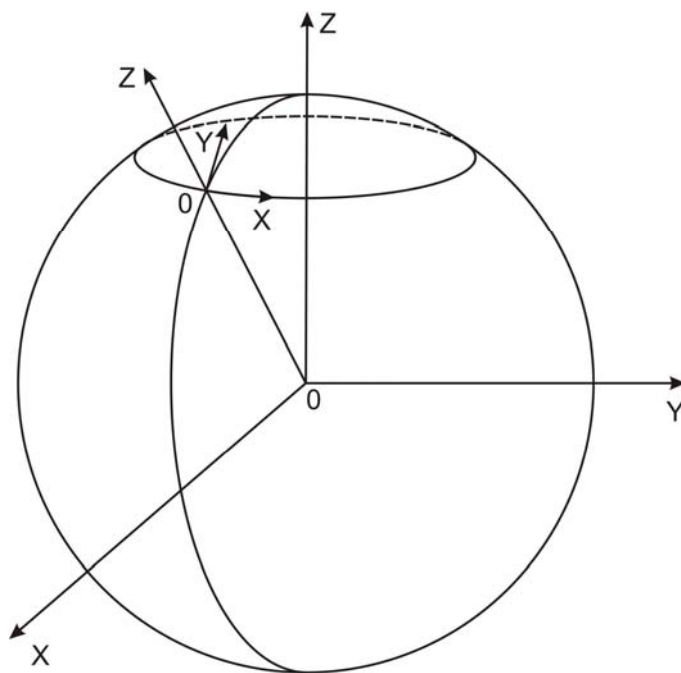


Рис. 3.1. Геоцентрическая и топоцентрическая системы координат

В геоцентрических системах координат ось OZ направлена по оси вращения Земли, а в референсных – по малой оси эллипсоида в сторону северного полюса. Оси OX и OY лежат в плоскости экватора перпендикулярно друг другу.

В зависимости от того, вращается ли система координат вместе с Землей, различают *гринвичские* и *инерциальные* системы.

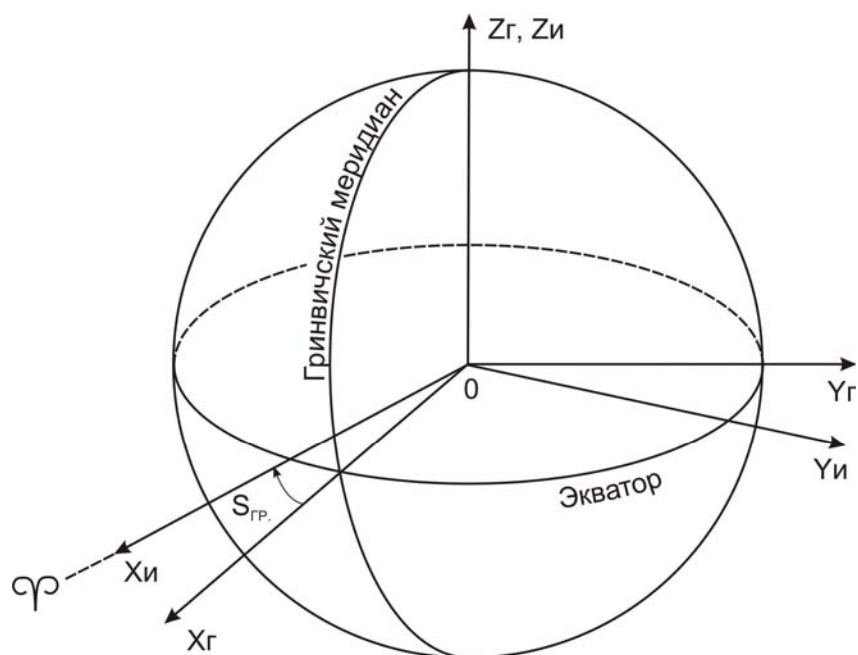


Рис. 3.2. Гринвичские и инерциальные системы координат

В *гринвичской* системе координат ось OX_G лежит в плоскости гринвичского меридиана и пересекает поверхность Земли в точке с широтой и долготой равными нулю. Такая система координат вращается вместе с Землей, поэтому координаты точек на Земле в течение суток не меняются.

В *инерциальной* системе координат ось OX_I направлена в *точку весеннего равноденствия* на небесной сфере. Это точка, в которой пересекаются небесный экватор и эклиптика. Можно считать, что она занимает фиксированное положение относительно звезд. Поскольку эта система координат фиксирована относительно небесной сферы и вместе с Землей не вращается, координаты точек на вращающейся Земле непрерывно изменяются. Вместе с тем взаимное расположение инерциальной и гринвичской систем может быть точно определено в любой момент времени, поскольку угол между осями OX_G и OX_I – это гринвичское звездное время ($S_{гр}$).

Прямоугольные геоцентрические и референчные системы координат используются в спутниковых навигационных системах, которые основаны на измерении расстояния от самолета до спутников. Спутники движутся по законам небесной механики в соответствии с уравнениями, описываемыми в инерциальной системе координат. После определения пространственного места самолета в этой системе его координаты пересчитываются в гринвичскую прямоугольную, а затем в геодезическую систему координат.

3.2. Сферические системы координат

Если Землю представить в виде сферы, то на ней может быть задана *сферическая система координат*. Это частный случай системы координат на эллипсоиде, поскольку сфера - это эллипсоид с нулевым сжатием.

Если полюсы сферической системы координат, то есть точки, в которых сходятся меридианы, совпадают с географическими полюсами Земли, то есть точками пересечения оси вращения Земли с ее поверхностью, то такую систему координат называют *нормальной сферической*.

Координатные линии на сфере задаются с помощью больших кругов.

Большим кругом на любой сфере называется линия, образованная путем сечения сферы плоскостью, проходящей через центр сферы.

Эта линия как бы делит сферу пополам и имеет форму окружности с радиусом, равным радиусу самой сферы. Ее название объясняется тем, что на сфере невозможно нарисовать окружность еще большего радиуса. Просто не поместится. Дуга большого круга на земной сфере в навигации называется *ортодромией* (по-английски – Great Circle) и имеет большое значение, поскольку соединяет любые две точки, через которые она проходит, по кратчайшему расстоянию.

Остальные окружности на сфере, плоскости которых не проходят через ее центр, называются *малыми кругами*.

Разумеется, на сфере можно провести сколько угодно больших кругов

Меридиан – большой круг, плоскость которого проходит через ось вращения Земли. Меридианов бесконечно много, поскольку их можно провести через любую точку (рис. 3.3).

Экватор – большой круг, плоскость которого перпендикулярна оси вращения Земли. Экватор только один (в конкретной сферической системе координат).

Параллель – дуга малого круга, плоскость которого перпендикулярна оси вращения Земли и, следовательно, параллельна экватору. Сам экватор также является частным случаем параллели.

Сферическая широта φ – это угол между плоскостью экватора и направлением из центра сферы на данную точку.

Широта измеряется от 90° южной широты (южный полюс) до 90° северной широты (северный полюс). Точки на экваторе имеют широту, равную нулю. При расчетах по формулам северным широтам приписывается знак плюс, а южным – минус.

Сферическая долгота λ – двугранный угол между плоскостями начального меридиана и меридиана данной точки.

Выбор начального меридиана условен. В разные исторические периоды в качестве начального использовались и Парижский меридиан, и меридиан острова Ферро (в Атлантическом океане), и даже Пулковский меридиан, проходящий через центр круглого зала Пулковской обсерватории под Санкт-Петербургом.

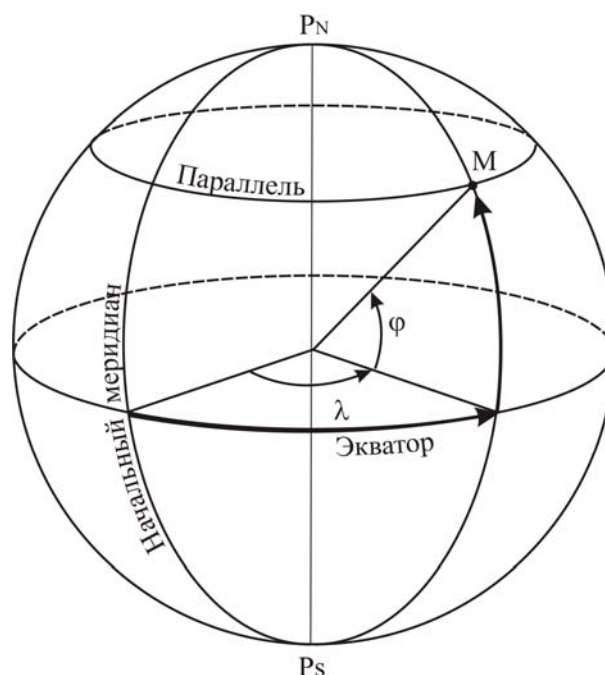


Рис. 3.3. Сферические широта и долгота.

С 1884 г. в качестве начального меридиана используется так называемый *гринвичский меридиан*, проходящий через пассажный инструмент всемирно известной Гринвичской обсерватории вблизи Лондона. Пассажный инструмент – это телескоп, ориентированный строго с севера на юг и служащий для фиксирования моментов прохождения звезд через небесный меридиан. Сейчас, в связи с разрастанием Лондона, обсерватория оказалась внутри города и ее пришлось перевести в другое место, но начальный меридиан остался на прежнем месте.

Долгота измеряется от 180° западной долготы (в формулах ей приписывается минус) до 180° восточной долготы, которая считается положительной. На полюсах долгота не определена, поскольку полюсы лежат в плоскостях одновременно всех меридианов.

Очевидно, что во всех точках параллели одинакова широта, а во всех точках меридиана – долгота.

Из рис. 3.4 можно вывести следующие соотношения между координатами точки (φ, λ) в сферической системе координат на сфере радиуса R и координатами (x, y, z) этой же точки в прямоугольной гринвичской системе координат:

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi \cos \lambda, \\ y &= R \cos \varphi \sin \lambda, \\ z &= R \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}\varphi &= \arcsin (z/R), \\ \lambda &= \arctg (y/x), \\ R &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Из этого же рисунка легко увидеть, что радиус параллели r на сфере пропорционален косинусу широты этой параллели:

$$r = R \cos \varphi.\tag{3.3}$$

Этот факт будет часто использоваться в дальнейшем.

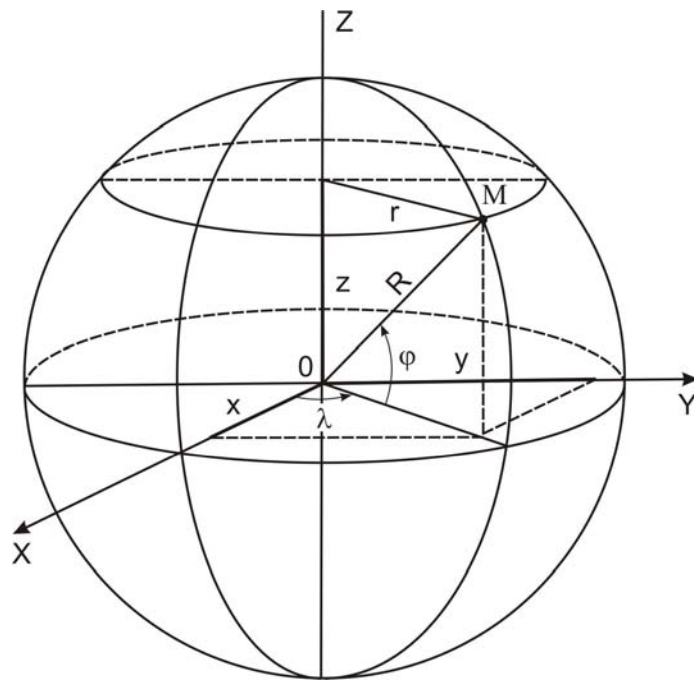


Рис. 3.4. Связь между сферическими и прямоугольными координатами

Сферическая система координат не обязательно должна быть *нормальной*, т.е. географические полюсы Земли и полюсы системы координат могут не совпадать. Если представить сетку меридианов и параллелей действительно в виде сетки, надетой на глобус (Землю), то ее можно смещать по поверхности сферы и разместить полюсы системы координат (точки схождения меридианов) в любом месте. В таких смещенных системах координат также будут свои широты и долготы, но измеряться они будут с помощью условных меридианов и параллелей. В картографии такие системы координат называют *косыми сферическими*, а в в навигации – *ортодромическими системами координат* (рис. 3.5).

За условный экватор *ортодромической системы координат* принимают линию заданного пути участка маршрута (частноортодромическая система) или так называемую «главную

ортодромию», проходящую от исходного до конечного пунктов маршрута (главноортодромическая система координат). Одна из дуг большого круга, перпендикулярных этому условному экватору (например, проходящая через аэродром вылета), принимается за начальный условный меридиан (рис. 3.6).

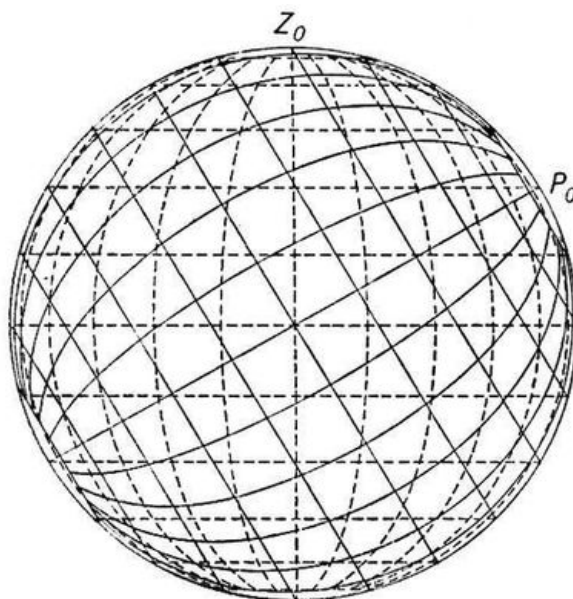


Рис. 3.5. Косая сферическая система координат

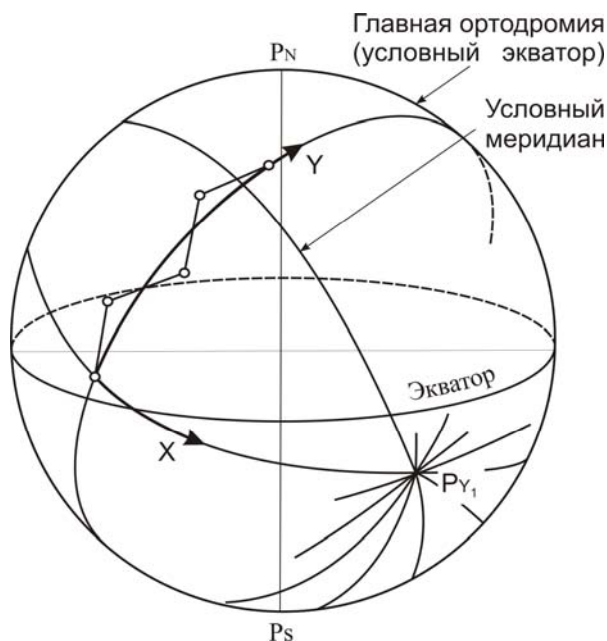


Рис. 3.6. Главно-ортодромическая система координат.

В главноортодромической системе координат оси обозначаются X , Z или X , Y . В частноортодромической системе - S , Z . Ортодромические координаты, хотя и являются условными широтами и долготами, т.е. угловыми величинами, обычно измеряются в линейной мере, то есть в километрах.

Преимуществом ортодромических систем координат для навигации является то, что полет выполняется вблизи условного экватора, совпадающего или близкого к линии заданного пути, и, следовательно, угол схождения условных меридианов близок к нулю. Кроме того, в узкой полосе вблизи условного экватора эту сферическую систему можно рассматривать как плоскую декартову систему, что упрощает расчеты.

3.3. Параметры земного эллипсоида и геодезическая система координат

На всех картах и в документах аэронавигационной информации указываются широты и долготы пунктов в геодезической системе координат, которая задана на поверхности эллипсоида вращения.

Эллипсоид - это объемное тело, образованное путем вращения эллипса (плоской фигуры) вокруг его малой оси.

Эллипс – плоская кривая, описываемая уравнением второго порядка (рис. 3.7). Например, в прямоугольной системе координат, начало которой совпадает с центром эллипса, его уравнение имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.4)$$

где a – большая, b – малая полуоси эллипса.

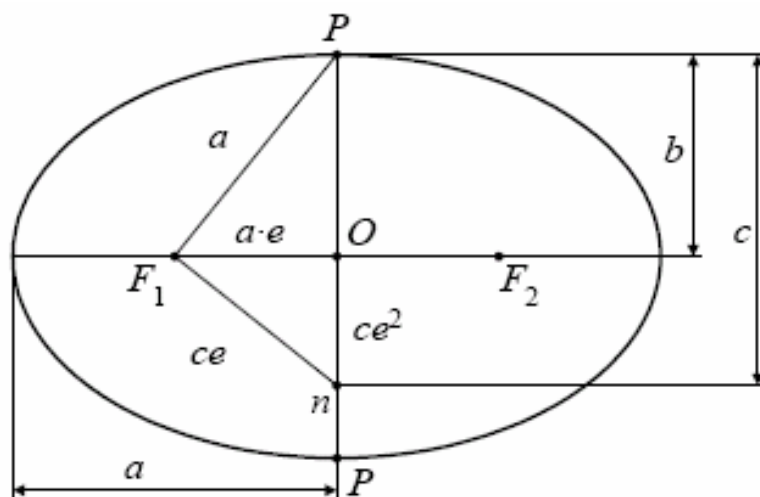


Рис. 3.7. Эллипс

Эллипс можно считать сжатой (сплюснутой) окружностью. Мы ежедневно видим эллипсы в обыденной жизни, в частности, когда смотрим на плоские круглые предметы (например, тарелки) под углом к их плоскости.

Кроме полуосей эллипса используются и другие его характеристики:

Сжатие α представляет собой отношение разности полуосей к длине большой полуоси:

$$\alpha = \frac{a - b}{a}$$

Сжатие характеризует форму эллипса и теоретически может лежать в пределах $0 \leq \alpha \leq 1$. Значение $\alpha = 0$ соответствует окружности, а $\alpha = 1$ – эллипсу, сжатому в такой степени, что он превратился в линию.

Для земного эллипсоида сжатие составляет примерно 1/298. Это означает, что малая полуось (полярный радиус Земли) примерно на 21 км меньше большой (экваториального радиуса).

Другой величиной, характеризующей это же свойство эллипса (его форму) является *эксцентриситет* e , который представляет собой отношение расстояния от центра эллипса O до любого из его фокусов F к длине большой полуоси:

$$e = \frac{OF}{a}.$$

Фокусы эллипса F_1, F_2 (рис. 3.7) – это такие две точки на его большой оси, что сумма расстояний до них от любой точки эллипса есть величина постоянная.

По мере уменьшения сжатия эллипса его фокусы приближаются к центру, поэтому для окружности $e = 0$, а в общем случае $0 \leq e \leq 1$.

Полуоси эллипса a и b , его сжатие α и эксцентриситет e связаны между собой различными соотношениями, которые позволяют рассчитать одни из этих параметров с помощью других. Например,

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2.$$

Чтобы полностью охарактеризовать размеры и форму эллипса достаточно двух из перечисленных параметров, но хотя бы один из них должен быть линейным (полуосью), иначе будут не определены размеры эллипса.

При вращении эллипса вокруг малой оси все его точки описывают окружность и как бы образуют объемную поверхность – эллипсоид с такими же a, b, α, e как у исходного эллипса. Так же как и на сфере, на поверхности эллипсоида путем его сечения плоскостями можно образовать параллели и меридианы. Поскольку эллипсоид получен вращением эллипса,

нетрудно сообразить, что параллели имеют форму окружности, а меридианы являются эллипсами.

С эллипсоидом связана *геодезическая система координат*, в которой координатами являются геодезические широта B , геодезическая долгота L и геодезическая высота H_T .

Геодезическая широта B – это угол, заключенный между плоскостью экватора и нормалью к поверхности эллипсоида в данной точке.

Нормаль – это перпендикуляр к касательной плоскости, проведенной в данной точке к поверхности эллипсоида.

В отличие от сферы, у которой нормаль совпадает с радиусом сферы и проходит через ее центр, у эллипсоида нормаль в общем случае через центр не проходит и пересекает малую ось эллипсоида в противоположном полушарии.

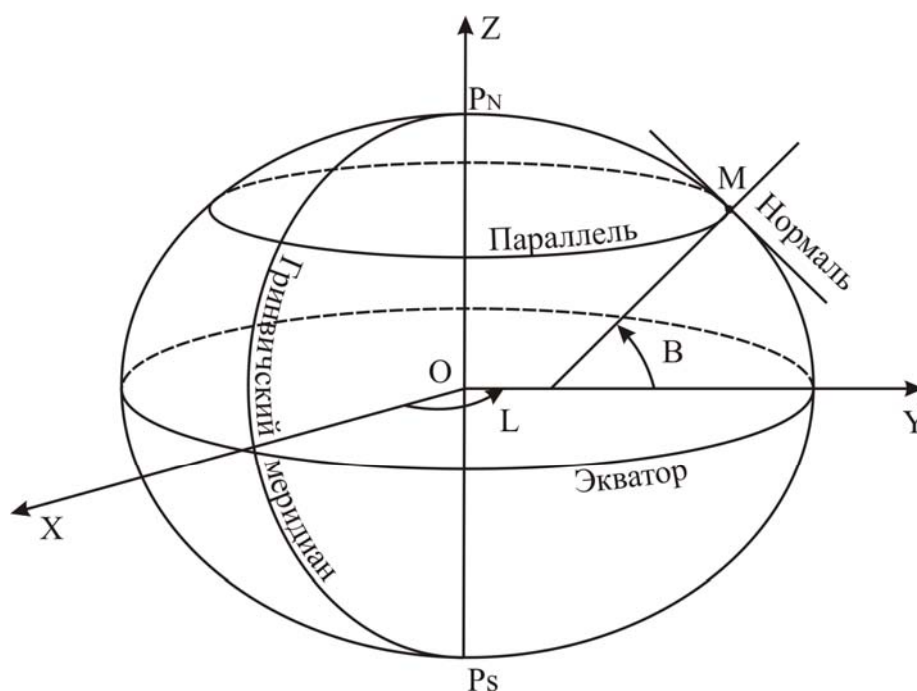


Рис. 3.8. Геодезическая система координат

Геодезическая долгота L – это двугранный угол между плоскостями начального меридиана и меридиана данной точки. Нетрудно заметить, что определения сферической и геодезической долгот совпадают.

Если необходимо рассматривать точки, не находящиеся на поверхности эллипсоида, используется третья координата - H_T .

Геодезическая высота H_T – расстояние от точки до поверхности эллипсоида по нормали к ней.

При решении задач на поверхности эллипсоида используется ряд величин и функций, которые упрощают запись формул.

Например, *первая сфероидическая функция W* , зависящая от широты точки:

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}. \quad (3.5)$$

Можно видеть, что W равна 1 на экваторе, а в остальных точках не на много меньше единицы.

Если через нормаль к поверхности эллипсоида провести любую плоскость, то она пересечет поверхность эллипсоида по линии, называемой *нормальным сечением* эллипсоида. В каждой точке выделяют два нормальных сечения: одно из них является *меридианом*, а другое, перпендикулярное к нему, называется *первым вертикалом*. Не следует путать первый вертикал с параллелью. Ведь плоскость параллели не проходит через нормаль (рис. 3.9).

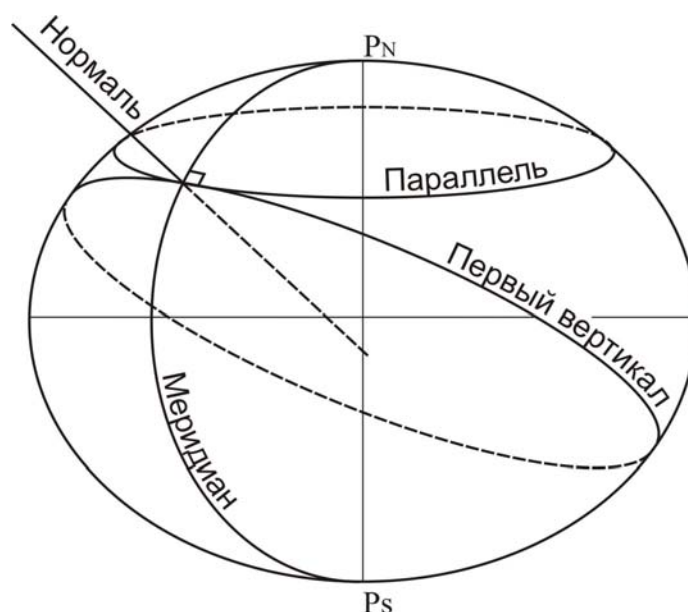


Рис. 3.9. Главные нормальные сечения эллипсоида

И меридиан, и первый вертикал являются кривыми переменной кривизны, зависящей от широты точки и, конечно, от параметров эллипсоида.

Радиусом кривизны произвольной кривой называют радиус окружности, проведенной через три бесконечно близкие точки этой кривой.

Радиус кривизны меридиана (M) можно рассчитать по формуле:

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{W^3}. \quad (3.6)$$

Радиус кривизны первого вертикала (N):

$$N = \frac{a}{W}. \quad (3.7)$$

Во всех точках эллипсоида M и N различны, причем $N > M$, кроме полюсов, где $N = M$.

Геометрический смысл величины N - это длина нормали от поверхности эллипсоида до пересечения с осью вращения (рис. 3.10).

Из рисунка легко найти радиус параллели на эллипсоиде:

$$r = N \cos B. \quad (3.8)$$

Сравнив эту формулу с формулой радиуса параллели на сфере

$$r = R \cos \varphi,$$

можно убедиться, что они похожи.

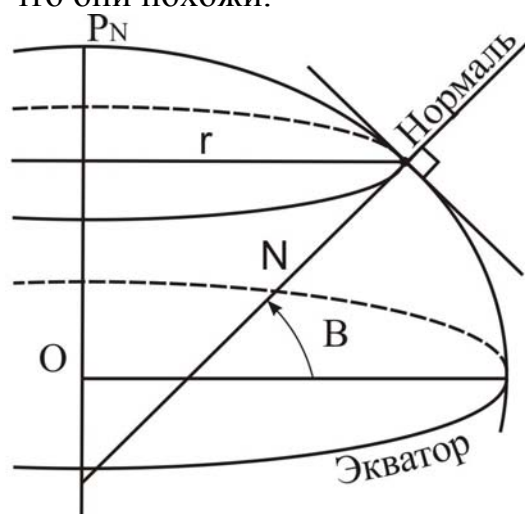


Рис. 3.10. Радиус параллели на эллипсоиде

В этих формулах различаются широты (соответственно, геодезическая и сферическая), а вместо радиуса сферы на эллипсоиде используется радиус кривизны первого вертикала.

Поскольку параллель является окружностью радиуса r , то длина S дуги параллели между точками с долготами L_1 и L_2 составит

$$S_{\text{пар}} = N \cos B \Delta L, \quad (3.9)$$

где разность долгот $\Delta L = L_2 - L_1$ должна быть выражена в радианах

Меридиан на эллипсоиде имеет форму эллипса, его кривизна изменяется с широтой. Длину его дуги между точками с широтами B_1 и B_2 нельзя записать простой формулой, поскольку она выражается интегралом, который аналитически не берется:

$$S_{\text{мер}} = \int_0^B M dB.$$

В этой формуле M является функцией широты.

На практике для расчетов применяется разложение в бесконечный ряд, в котором используются несколько первых членов, или заранее рассчитанные таблицы. Например, для эллипсоида Красовского, используемого в России, длина меридиана от экватора до параллели с широтой B может быть с точностью до 0,2 м рассчитана по формуле

$$S_{\text{мер}} \approx 6367558,4969 \cdot B - \sin B \cos B [32005,7801 + (133,9213 + 0,7032 \sin^2 B) \sin^2 B].$$

Для небольшой разности широт можно использовать приближительную формулу:

$$S_{\text{мер}} = M_{\text{ср}} \cdot \Delta B. \quad (3.10)$$

где $M_{\text{ср}}$ – средний радиус кривизны меридиана на данном его отрезке, а разность широт ΔB также берется в радианах.

С длиной дуги меридиана связана одна из используемых в навигации единиц измерения расстояния – *морская миля*, м.м. (nautical mile, n.m.). Исторически она возникла как длина одной минуты (1') меридиана. Из-за сжатия Земли эта длина различна на разных широтах и изменяется примерно от 1843 м на экваторе до 1862 м на полюсах.

Но любая единица измерения должна иметь постоянное значение. В 1928 г. Международное географическое бюро приняло для морской мили значение 1852 м (точно). Это же значение используется и Международной организацией гражданской авиации (ИКАО).

3.4. Система измерения высот

Виды высот. Как же отмечалось, третьей координатой в системе геодезических координат является *геодезическая высота* ($H_{\text{Г}}$). Она измеряется от поверхности эллипсоида по нормали к ней. В настоящее время $H_{\text{Г}}$ на борту ВС может быть определена только с помощью спутниковых навигационных систем. Поскольку поверхность геоида может быть аппроксимирована самыми разными референц-эллипсоидами, одна и та же точка может иметь несколько геодезических высот.

Ортометрическая высота $H_{\text{орт}}$ измеряется от уровня геоида по направлению отвесной линии (рис. 3.11).

Превышение N геоида над поверхностью эллипсоида в данной точке называется *волной геоида* или *аномалией высоты* (undulation).

Волна геоида считается положительной, если поверхность геоида проходит выше поверхности эллипсоида.

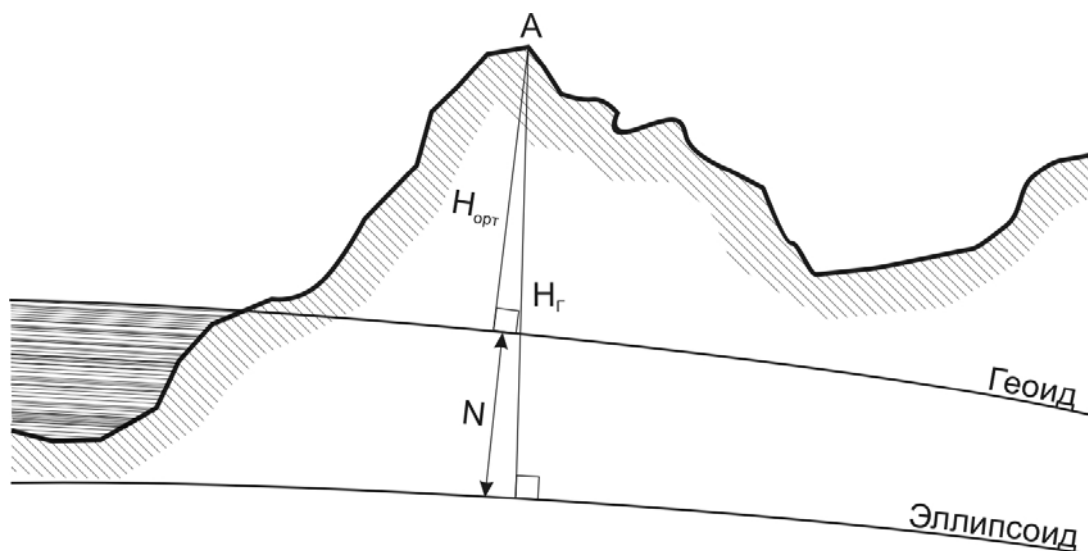


Рис. 3.11. Высоты и волна геоида

Зная волну геоида, можно перейти от геодезической высоты к ортометрической и обратно.

$$H_{\Gamma} = H_{\text{орт}} + N. \quad (3.11)$$

В соответствии с требованиями ИКАО волна геоида для порога ВПП должна публиковаться в документах аэронавигационной информации.

Но оказывается, что определить значение ортометрической высоты практически невозможно. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Нивелирование. Высоты точек земной поверхности при геодезической съемке определяют методом *нивелирования* (рис. 3.12). Нивелир – это оптико-механический прибор, представляющий собой устанавливаемую на треножнике (штативе) зрительную трубу, ось которой с помощью системы пузырьковых уровней устанавливается горизонтально. На расстоянии от нивелира устанавливается вертикально геодезическая рейка с делениями. Наблюдая ее в зрительную трубу, отмечают находящееся против риски в поле зрения нивелира деление нанесенной на рейке шкалы. Затем рейку устанавливают с противоположной стороны нивелира, а его зрительную трубу поворачивают вокруг вертикальной оси на 180° , направляя на рейку, и вновь фиксируют деление шкалы.

Очевидно, что разность отсчетов по рейке a_1 и a_2 равна разности высот H_1 и H_2 точек, в которых рейка была установлена.

$$\Delta h = H_2 - H_1 = a_1 - a_2.$$

Таким образом, в принципе, перемещаясь от точки, находящейся на уровне моря, и переставляя нивелир и рейку, можно определить высоту любой точки рельефа, складывая высоты «ступенек» Δh .

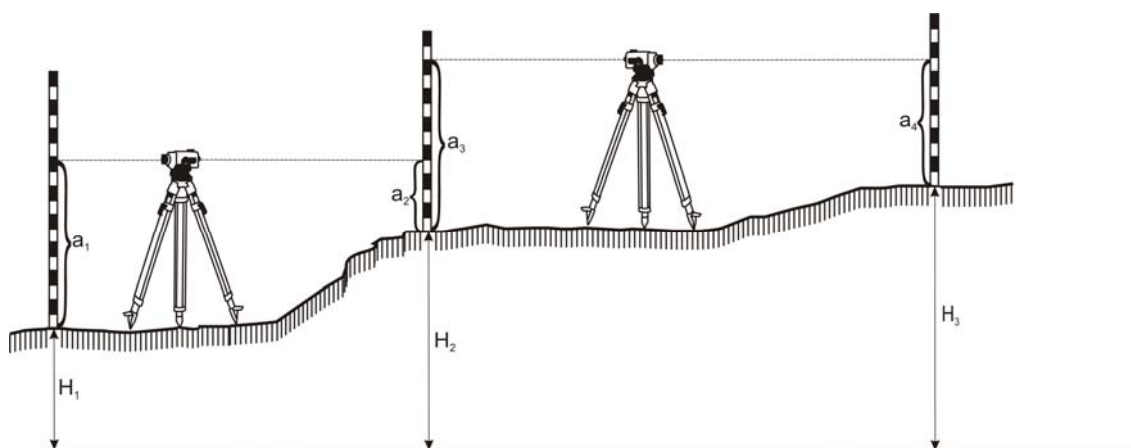


Рис. 3.12. Нивелирование

На самом деле все оказывается не так просто. Ведь нивелир устанавливается горизонтально с помощью системы пузырьковых уровней, а это означает, что горизонтальная плоскость в данной точке совпадает с уровенной поверхностью. Но уровенные поверхности, проходящие на разных высотах, не параллельны друг другу. Это вызвано и эллиптической формой Земли, и ее вращением, и неравномерной плотностью планеты. Уровенные поверхности где-то сближаются, где-то расходятся, конечно, под очень мылыми углами (рис. 3.13).

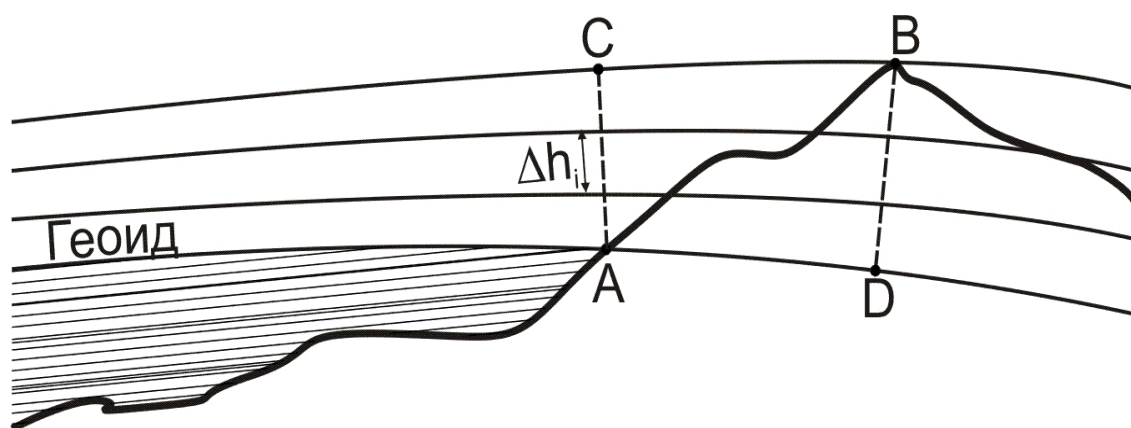


Рис. 3.13. Уровенные поверхности и высоты точек

Из-за этого получается, что высота точки (например, точки В на рис. 3.13), полученная путем суммирования Δh_i , измеренных при нивелировании от точки А (на уровне моря) до точки В, окажется разной в зависимости от пути нивелирования, то есть траектории, по которой производились измерения. Фактически можно пройти с нивелиром только по физической поверхности Земли, по склону горы от А до В. Но для наглядности рассмотрим и гипотетические случаи.

Пусть С – точка, находящаяся вертикально над А на той же уровенной поверхности, что и интересующая нас точка В. Если пройти с нивелиром от А до С (оставив в стороне вопрос, как это реализовать практически), то получим высоту, равную длине отрезка АС. При перемещении от С до В никакого приращения высот не произойдет, поскольку точки находятся на одной уровенной поверхности (как бы на одной горизонтали). Следовательно высота точки В окажется равной расстоянию АС.

Но если провести нивелирование по другому пути, например А-Д-В, то высота окажется другой. Точки А и Д находятся на одном уровне, здесь приращения высоты не будет, поэтому высота точки В окажется равной длине отрезка ДВ. Но здесь те же самые уровенные поверхности находятся уже на других расстояниях друг от друга и их суммирование даст другое значение высоты. Аналогично, любой другой путь нивелирования каждый раз будет давать новое значение высоты точки В над уровнем моря.

Какая же из этих высот будет являться «правильной», то есть ортометрической высотой над геоидом? Конечно, высота, измеренная вдоль линии ДВ. Но измерить ее нивелиром физически невозможно – она находится ниже уровня рельефа! Следовательно, на суше точно измерить ортометрическую высоту рельефа местности таким образом невозможно.

Приращение геопотенциала. Рассмотрим, как геодезисты вышли из этой тупиковой ситуации. Расхождение и схождение уровенных поверхностей вызвано изменением ускорения свободного падения g в разных местах планеты, а также на разных высотах. Оказалось, что если суммировать не сами приращения высот Δh_i , а их произведения на ускорение свободного падения g_i в данном месте, то сумма $\sum g_i \Delta h_i$ (приращение геопотенциала) не зависит от пути нивелирования. Это объясняется тем, что различие величин Δh_i на разных путях нивелирования компенсируется соответствующим изменением величины g_i . Ведь ускорение свободного падения – это производная геопотенциала. Чем оно больше, тем ближе проходят друг к другу уровенные поверхности, тем меньше между ними расстояния Δh_i .

Таким образом, нивелировать можно по любому пути и, в частности, по склону горы от А до В. Сумма приращений геопотенциала будет одна и та же.

Заметим, что если значения Δh_i уменьшать до бесконечности (при соответствующем увеличении количества «шагов» нивелирования), то сумма $\sum g_i \Delta h_i$ будет представлять собой определенный интеграл – сумму бесконечно большого количества бесконечно малых слагаемых.

Допустим, что приращение геопотенциала $\sum g_i \Delta h_i$ уже экспериментально определено. Но как теперь найти саму высоту H_B , то есть длину отрезка ДВ? На помощь придет теорема об интегральном среднем из высшей математики.

Напомним, что *интегральное среднее* f_{cp} функции $f(x)$ на интервале от a до b рассчитывается как

$$f_{cp} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

но тогда

$$b-a = \frac{1}{f_{cp}} \int_a^b f(x) dx.$$

Это означает, что длину интервала можно определить, разделив интеграл от функции на среднее значение функции. Отсюда следует, что высоту точки $H_B = \sum \Delta h_i$ (где Δh_i - приращения высоты вдоль отрезка DB) можно найти, поделив найденное суммарное приращение геопотенциала (его интеграл) на *среднее значение* g_{cp} ускорения свободного падения на отрезке DB:

$$H_B = \frac{\sum g_i \Delta h_i}{g_{cp}}. \quad (3.12)$$

Но тогда для определения высоты необходимо знать, как изменяется g не только вдоль пути нивелирования, но и вдоль вертикальной линии DB, чтобы можно было определить g_{cp} .

К сожалению, экспериментально измерить g внутри Земли, под ее поверхностью физически невозможно. Следовательно, *на суше невозможно определить ортометрическую высоту*.

Квазигеоид. Но ученые вышли и из этого положения. В XVIII веке А.Клеро вывел уравнение, по которому можно определить ускорение свободного падения g в любой точке идеального однородного эллипсоида с учетом его вращения.

$$g = g_e(1 + \beta \sin^2 B), \quad (3.13)$$

где

$$\beta = \frac{5}{2}q - \alpha, \quad q = \frac{\omega^2 a}{g_e},$$

g_e - ускорение свободного падения на экваторе эллипсоида,

B - геодезическая широта точки на эллипсоиде,

α - сжатие эллипсоида,

a - большая полуось эллипсоида.

ω - угловая скорость вращения эллипсоида.

Это уравнение получено чисто математически и относится к абстрактному эллипсоиду. Реальная же Земля неоднородна и имеет неправильную форму. Поэтому рассчитанные по уравнению Клеро значения g не будут совпадать с реальными значениями g в разных толчках планеты.

Но на основе уравнения Клеро можно решить и обратную задачу – измерить в разных точках Земли множество значений g и подобрать такую форму и размер абстрактного эллипсоида (a и α), чтобы расчетные значения g по уравнению Клеро как можно ближе совпадали с измеренными на реальной Земле. Такой подобранный эллипсоид называется *нормальной Землей*. Можно считать, что он аппроксимирует реальную Землю, но не с точки зрения геометрической близости поверхности, а с точки зрения гравитации.

Сила тяжести на такой нормальной Земле в любой точке может быть вычислена по уравнению Клеро и называется *нормальной силой тяжести*. Фактическая же сила тяжести отличается от нормальной в основном за счет региональных и местных гравитационных аномалий.

М.С.Молоденский предложил использовать значение g_{cp} на отрезке DB, рассчитанное для *нормальной силы тяжести*. Полученная таким образом высота H_{DB} называется *нормальной высотой*. Если отложить вниз от точки В нормальную высоту, получим уровень, называемый *уровнем квазигеоида*.

В морях и океанах, где нет проблемы с определением g_{cp} , уровни геоида и квазигеоида совпадают. На суше в равнинной местности эти уровни, как предполагается, могут расходиться до 20-30 см, а в горной местности до 2-3 м.

Таким образом, поверхность квазигеоида, в отличие от геоида, может быть однозначно определена, и поэтому именно она используется в качестве начала отсчета для измерения высот.

Балтийская система высот. Высота, измеренная от уровня квазигеоида, называется *нормальной высотой*, а в навигации ее называют *абсолютной высотой*. Впрочем, учитывая незначительное расхождение геоида и квазигеоида, им часто пренебрегают и считают, что абсолютная высота отсчитывается от геоида. В навигации уровень геоида (квазигеоида) называют *средним уровнем моря* (*MSL – mean sea level*).

Следует отметить, что под средним уровнем моря MSL понимают именно *эквипотенциальную (уровенную) поверхность*, которая совпадает с поверхностью океана в его спокойном состоянии. Но как определить положение этой поверхности экспериментально? Разумеется, нужно в каком-либо месте много лет проводить наблюдения за фактическим уровнем моря и осреднить его, чтобы избавиться от влияния волн, приливов и отливов. Но физический, реальный средний уровень моря, определенный по многолетним наблюдениям, может отличаться в разных местах планеты из-за различной температуры и солености морской воды, различия гидрографических условий. Поэтому экспериментально определенные в

разных странах средние уровни морей могут различаться, то есть лежать на разных уровнях поверхностей.

В России регулярные наблюдения за уровнем моря были начаты в 1703 году по указанию Петра Первого в военно-морской крепости Кронштадт (о. Котлин в Финском заливе Балтийского моря). К сожалению, данные тех лет были утеряны. Но по результатам измерений, проведенных в 1825-1840 г.г., был определен средний уровень Балтийского моря и закреплен в виде «нуля кронштадтского футштока». Футшток – это водомерная рейка с делениями, закрепленная на устое Синего моста через Обводный канал в г.Кронштадт. Рядом установлена доска с соответствующей надписью (рис. 3.14).



Рис. 3.14. Памятная доска вблизи кронштадтского футштока

В непосредственной близости от футштока находится уровневый пост – павильон с расположенным внутри колодцем, который соединяется с Обводным каналом (рис.3.15). Расположенные в нем приборы непрерывно регистрируют уровень моря.

Нуль кронштадтского футштока является уровнем начала отсчета высот в нашей стране, через него проходит геоид. Поскольку футшток находится на острове, начинать от него нивелирование неудобно. Поэтому этот уровень перенесен путем нивелирования по льду Финского залива на материк и закреплен в виде репера в парке г.Ломоносов. От этого репера и продолжалось нивелирование по всей территории страны для определения

высот рельефа местности. Когда нивелирные сети достигли других морей, к удивлению геодезистов оказалось, что уровни этих морей не совпадают с уровнем Балтийского моря, то есть находятся на других уровнях поверхностей. Уровень Черного моря оказался ниже примерно на 25 см, Белого – на 30 см. Уровень Тихого океана во Владивостоке ниже на 1 м, а в Магадане – на 52 см. Каспийское море (на самом деле это озеро) лежит почти на 29 м ниже уровня кронштадтского футштока.



Рис. 3.15. Павильон уровневого поста

Система отсчета высот, основанная на нуле кронштадтского футштока, получила название *Балтийской системы высот*. В других странах уровень начала отсчета высот может быть другим, основанным на многолетних измерениях уровней других морей.

3.5. Астрономические координаты

Поскольку геодезические широта и долгота связаны с нормалью к поверхности эллипсоида, определить их экспериментально невозможно. Ведь и эллипсоид, и нормаль к нему являются абстрактными геометрическими понятиями и никакой прибор не может определить, как проходит нормаль к эллипсоиду. Поэтому на самом деле экспериментально определяют так называемые *астрономические широту и долготу*.

Астрономическая широта – это угол между плоскостью экватора и направлением *отвесной линии* в данной точке.

Астрономическая долгота – двугранный угол между плоскостью начального меридиана и плоскостью астрономического меридиана данной точки.

При этом под *плоскостью астрономического меридиана* понимается плоскость, проходящая через отвесную линию и параллельная оси вращения Земли.

Таким образом, астрономические широта и долгота связаны не с нормалью к эллипсоиду, а с *отвесной линией*. А это уже физическое понятие, поскольку направление отвесной линии – это направление силы тяжести, перпендикулярное к поверхности геоида. Его можно определить экспериментально.

Астрономические координаты пунктов измеряются по наблюдениям небесных светил с помощью астрономических приборов, установленных горизонтально, то есть по уровенной поверхности, перпендикулярно отвесной линии.

Отвесная линия не совпадает с нормалью к эллипсоиду и может отклоняться от нее как в плоскости меридиана, так и в плоскости первого вертикала. Если в данном пункте известны отклонения отвесной линии от нормали к земному эллипсоиду, то можно легко определить и геодезические координаты пункта.

В каждой точке астрономические широта и долгота имеют вполне определенные значения. Но говорить о *системе* астрономических координат вряд ли правильно. Если на геоиде провести линии с одинаковыми *астрономическими* широтами и долготами (параллели и меридианы), то они будут неправильными кривыми, поскольку направление отвесной линии меняется от точки к точке в зависимости от распределения близлежащих гравитационных масс. Теоретически даже может оказаться, что две разные точки имеют одинаковые широту и долготу.

3.6. Многообразие геодезических систем координат

На картах и в документах аэронавигационной информации всегда приведены широты и долготы в геодезической системе координат, заданной на эллипсоиде, аппроксимирующем Землю.

Земля одна, но можно подобрать много эллипсоидов, по-разному аппроксимирующих поверхность геоида и различающихся длинами полуосей, сжатием, расположением и ориентацией внутри геоида.

Каждая страна для задания системы координат и издания карт для своей территории выбирает эллипсоид таких размеров и такой формы, чтобы он как можно ближе подходил к поверхности геоида на территории данной страны. Это дает возможность с минимальными погрешностями перенести

точки с геоида на эллипсоид, чтобы затем «развернуть» его на плоскость (карту).

При этом в других регионах земного шара расхождение эллипсоида и геоида по высоте может быть значительным и достигать сотен метров.

Прежде, чем подобрать параметры эллипсоида, проводят *геодезическую съемку*, чтобы изучить форму геоида на данной территории.

Обычно эллипсоиду присваивают название, состоящее из фамилии предложившего его ученого и года, когда он был введен. Например, эллипсоиды Деламбера-1800, Кларка-1880, Хейфорда-1909 и т.д.

С XIX века в разных странах и по мере появления новых данных геодезических съемок были предложены сотни различных эллипсоидов. Их называют *референц-эллипсоидами* от английского *to refer* (ссылаться на что-то, относиться к чему-то). Иногда это переводят как «эллипсоид отнесения» в том смысле, что все точки на реальной земной поверхности переносят на поверхность этого эллипсоида и используют заданную на нем систему геодезических координат.

Часто расположение референц-эллипсоида в теле геоида задают с помощью так называемых *исходных геодезических дат* (от английского *data* – данные, в единственном числе – *datum*). В качестве этих дат обычно выступают:

- координаты пункта, принятого за исходный, в котором геодезические широта и долгота (на эллипсоиде) совпадают с астрономическими широтой и долготой (на геоиде), или же различаются на вполне определенную величину,

- азимут с исходного геодезического пункта на другой, смежный пункт,

- высота геоида над эллипсоидом в исходном пункте.

Направление малой оси эллипсоида обычно выбирают совпадающим или очень близким к направлению оси вращения Земли. Центр референц-эллипсоида, как правило, не совпадает с центром масс Земли.

Если же эллипсоид подобран не для отдельной страны, а для Земли в целом (чтобы в среднем подходил ближе к поверхности всего геоида), то его называют *общеземным эллипсоидом*. Центр масс такого эллипсоида размещают в центре масс планеты.

3.7. Геодезические сети

Для того, чтобы подобрать эллипсоид, подходящий к геоиду в целом или на определенной территории, необходимо определить форму геоида на данной территории. Для этого используют геодезические сети.

Геодезическая сеть – это совокупность геодезических пунктов, закрепленных на земной поверхности, положение которых определено в общей для них системе координат.

Геодезический пункт на местности обозначен специальным сооружением, которое состоит из подземной и наружной частей. Подземная часть называется *центром пункта* геодезической сети. Именно он является носителем координат, поэтому должно быть обеспечено отсутствие его смещения и сохранность. Устройство его может быть разным в зависимости от местности. Например, в северной части зоны сезонного промерзания *центр* представляет собой железобетонную сваю диаметром 20 см, уходящую в землю на глубину до 4 метров. В верхней части центра (на земной поверхности) закреплена чугунная *марка*, на сферической поверхности которой имеется отверстие диаметром 2 мм – так называемая *метка* (рис.3.16). Именно к метке и относятся координаты, определенные для данного геодезического пункта. На марке имеется отлитая вместе с ней надпись, указывающая вид и номер геодезического пункта. Если пункт предназначен для обозначения высоты данной точки над уровнем геоида, то есть входит в сеть нивелирования, то его называют *репером*. Рядом с центром (или непосредственно на нем, если он достаточно выступает над землей) устанавливается чугунная табличка с надписью «Геодезический пункт. Охраняется государством».



Рис.3.16. Марка и метка центра геодезического пункта

Наружная часть геодезического пункта называется *геодезическим знаком*.

Используются знаки разных видов (туры, пирамиды, простые и сложные сигналы) в зависимости от характера местности и от того, насколько высоко необходимо поднять измерительный прибор (например, теодолит), чтобы завизировать соседний знак. Например, если требуемая высота установки прибора составляет несколько метров, то геодезический знак сооружается в виде *сигнала*. Простой сигнал (рис.3.17) состоит из двух пирамид (вышек), расположенных одна в другой. На внутренней пирамиде

крепится штатив прибора, а на внешней – площадка, на которой стоит наблюдатель и на которой сверху крепится визирная цель, имеющая обычно форму цилиндра. Именно ее визируют с помощью теодолита с соседнего геодезического пункта. Сигнал может иметь и более сложное устройство. Высота сигнала може достигать 55 м и с него можно визировать геодезические пункты на расстоянии до 30-50 км.

Геодезические сети могут быть плановые, нивелирные, гравиметрические.

Плановые сети строятся для определения расстояний между пунктами и их координат с помощью триангуляции, полигонометрии и других методов, разработанных в геодезии.

Нивелирные (высотные) сети включают в себя пункты, для которых достаточно точно определена их высота над уровнем квазигеоида.

Гравиметрическая сеть включает в себя пункты, в которых с наивысшей точностью определено ускорение свободного падения. Разумеется, и координаты этих пунктов должны быть определены достаточно точно.

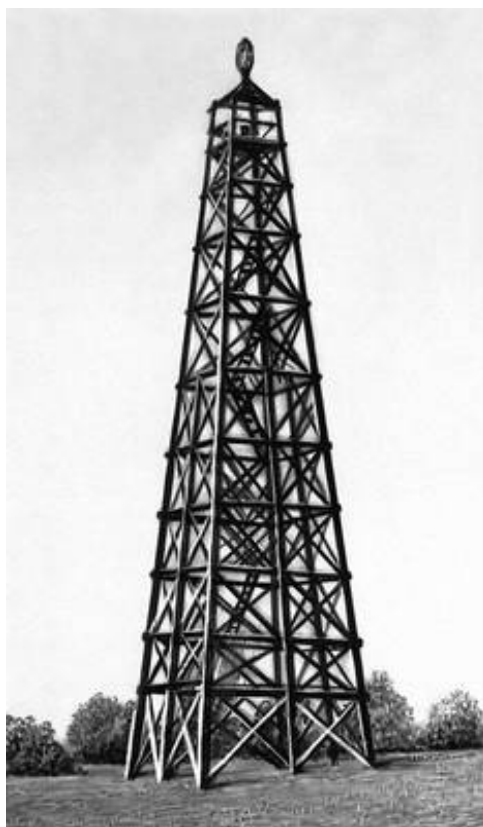


Рис. 3.17. Простой сигнал

Один и тот же геодезический пункт может принадлежать одновременно плановой, нивелирной и гравиметрической сети.

Если на части геодезических пунктов сети определены не только геодезические, но и астрономические координаты (широта и долгота), то такие сети называют *астрономо-геодезическими* (АГС).

Государственная геодезическая сеть (ГГС) Российской Федерации включает в себя астрономо-геодезические сети 1 и 2 классов, а также геодезические сети сгущения 3 и 4 классов, различающихся геометрией построения и точностью. Сеть 1 класса образована рядами триангуляции, длиной 200-250 км, проходящими вдоль меридианов и параллелей (рис.3.18). В астрономо-геодезических пунктах этой сети определяются как геодезические, так и астрономические координаты. Ряды триангуляции 2 класса длиной 100-120 км, заполняют территории между рядами 1 класса. Сети 3 и 4 классов сгущают до необходимой плотности сети 2 класса.

В сетях 1 класса длина стороны треугольника составляет 20-25 км, средняя квадратическая погрешность определения его углов – менее 1", средняя квадратическая погрешность взаимного положения смежных пунктов не превышает несколько сантиметров.

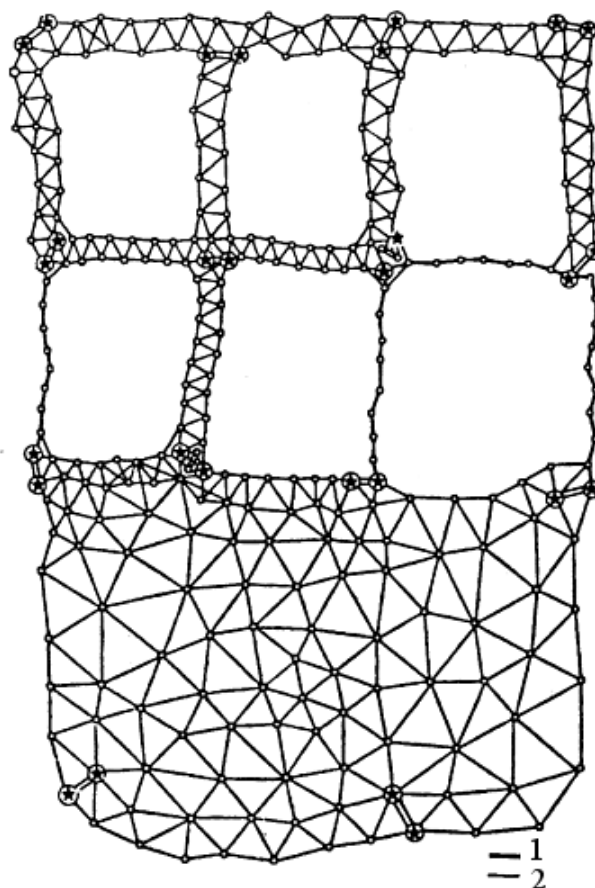


Рис.3.18. Структура геодезической сети

Кроме того, в ГГС включены некоторые пункты *космической геодезической сети*. Эта сеть представляет собой глобальное геодезическое построение, основанное на использовании искусственных спутников Земли. В один и тот же момент времени из нескольких пунктов этой сети измеряется направление на спутник и удаление до него. По измеренным данным можно определить взаимное расположение этих пунктов с высокой точностью

благодаря избыточности измерений. Космические геодезические сети используются для установления связи между отдельными геодезическими системами, разделенными, например, океанами, в которых традиционная триангуляция, разумеется, невозможно.

Существует также *доплеровская геодезическая сеть*, включающая в себя 162 пункта на территории бывшего СССР и стран Восточной Европы. Координаты пунктов этой сети определялись путем многократных измерений, выполненных в период с 1984 по 1993 г с помощью спутниковой навигационной системы «Транзит» (США). Это первая навигационная спутниковая система, разработанная в начале 60-х годов и с 1967 г. находящаяся в открытом коммерческом использовании. Принцип ее действия основан на эффекте Доплера, отсюда и название сети. В СССР использовалась спутниковая система «Цикада» с аналогичным принципом действия.

Любые измерения, какими бы точными приборами они не осуществлялись, содержат погрешности. Это относится и к углам триангуляционных треугольников, и к их сторонам. При переходе от одного треугольника к другому погрешности накапливаются. В результате оказывается, что, например, расстояние между геодезическими пунктами, рассчитанное из одного треугольника, не совпадает со значением, полученным из другого треугольника, смежного с первым. Это же относится ко всем сторонам треугольников геодезической сети, а также к углам и координатам пунктов.

Поэтому одной из важных задач геодезии является *уравнивание результатов измерений*. Для этого составляется система из сотен и даже тысяч уравнений, в которых неизвестными являются стороны и углы треугольников. Неизвестных в такой системе меньше, чем уравнений, поскольку один элемент (например, сторона), может входить в два треугольника. Решение системы уравнений заключается в определении таких значений элементов геодезической сети (расстояний, углов), чтобы они были как можно ближе к измеренным значениям. Для этого используется *метод наименьших квадратов*, который позволяет получить такие значения неизвестных, чтобы сумма квадратов их отклонений от измеренных значений была минимальной. Очевидно, что до появления вычислительной техники решение таких систем уравнений было непростой задачей.

3.8. Геодезическая система координат СК-42

В 30-е годы XX века в Советском Союзе были начаты работы по определению параметров референц-эллипсоида, наилучшим образом подходящего к поверхности геоида на территории СССР. Для этого нужно было провести геодезическую съемку территории страны. Руководство работами осуществляли профессор *Феодосий Николаевич Красовский* (1878-

1948) (рис. 3.19) и его ученик *Александр Александрович Изотов (1907-1988)*. Важную роль в исследовании играл и *Михаил Сергеевич Молоденский (1909-1991)*.

До проведения этих работ в стране не существовало единого, официально принятого референс-эллипсоида. Для геодезической съемки использовались различные эллипсоиды – Кларка, Хейфорда, Бесселя.

С 1910 г. номинальным исходным пунктом астрономо-геодезических сетей страны является углубление на центральной плитке пола в центре Круглого зала главного здания Пулковской астрономической обсерватории под Санкт-Петербургом (рис. 3.20). Астрономическая широта этого пункта $59^{\circ}46'18,71''$, а долгота $30^{\circ}19'38,40''$ (по уточненным данным на 1975 г.). Поскольку центр Круглого зала, естественно, не являлся пунктом геодезической сети, он был «привязан» к геодезическому пункту сигнал «А» Саблинской геодезической сети (названа по наименованию населенного пункта Саблино под Санкт-Петербургом). Этот сигнал расположен не далее двухсот метров от Круглого зала.



Рис.3.19. Ф.Н.Красовский

С 1932 г. Пулковская геодезическая система распространялась на восток и достигла Красноярска, Казахстана и Средней Азии. Одновременно проводились работы и в восточных районах страны. К середине 30-х годов на территории СССР образовалось три независимые геодезические системы – Пулковская, Ташкентская и Свободненская (по наименованию г.Свободный). Они создавались на основе эллипсоида Бесселя 1841 г., но в каждой из систем эллипсоид имел собственную ориентацию. Это приводило к тому, что координаты одной и той же точки в разных системах расходились на сотни метров. Требовалось произвести уравнивание результатов геодезической съемки. Для этого необходимо было решить систему из 484 уравнений. При этом использовались также данные по США и Западной Европе. До этого работ такого масштаба и точности в мире не проводилось.

По результатам уравнивания Ф.Н.Красовский предложил принять для земного эллипсоида большую полуось равной 6378245 м, а сжатие 1:298,3. В 1942 г. эти параметры были утверждены. Впоследствии этот эллипсоид получил имя Красовского.

В 1943 г. вышел приказ Главного управления геодезии и картографии об установлении исходных геодезических дат. Исходным пунктом установлен центр Круглого зала Пулковской обсерватории, его геодезические координаты $B = 59^{\circ}46'18,55''$; $L = 30^{\circ}19'42,09''$.

Вычисленный азимут на пункт «Бугры» Саблинской сети составил $121^{\circ}40'38,79''$. Тем самым была задана ориентация эллипсоида Красовского.



Рис. 3.20. Пулковская обсерватория (довоенный снимок)

Необходимо отметить, что эти исходные геодезические даты были рассчитаны, а не получены в результате съемки, поскольку здание Пулковской обсерватории во время войны было разрушено. Да и сам исходный пункт находился в это время на территории, занятой врагом.

В этом же приказе отмечалось, что в исходном пункте высота геоида над эллипсоидом равна нулю. Конечно, это решение было ошибочным. Ведь положение эллипсоида нужно было подобрать так, чтобы он подходил как можно ближе к геоиду на всей территории страны, а не совпадал с ним именно в Пулково. Впоследствии это положение было отменено, но оно до сих пор упоминается в различных учебниках.

К 1946 г. уравнивание астрономо-геодезической сети было завершено и было принято Постановление Совета Министров СССР № 760 от 7 апреля 1946 г. «О введении единой системы геодезических координат и высот на территории СССР». Этим постановлением учреждалась «Система координат 1942 г (СК-42)» на эллипсоиде Красовского. За исходный пункт принималось

Пулково, а за исходный уровень отсчета высот – нуль Кронштадтского футштока.

Однако в данном постановлении не говорилось, какой именно пункт в Пулково является исходным. Центр Круглого зала для этой цели не очень удобен, поскольку из него невозможно начинать съемку. Поэтому в 1948 г. было принято, что исходным пунктом триангуляции СССР является геодезический пункт сигнал «А» Саблинской сети с координатами

$$B = 59^{\circ}46'15,359'' ; \quad L = 30^{\circ}19'28,318''.$$

Азимут с пункта сигнал «А» на пункт Бугры $A = 121^{\circ}06'42,305''$.

Именно в этой геодезической системе координат СК-42 на эллипсоиде Красовского на протяжении десятилетий указываются широты и долготы на картах и в документах аэронавигационной информации. В зарубежной литературе она часто обозначается как Pulkovo 42 или SK-42.

3.9. Международные системы отсчета

Современная аэронавигация является международной и очевидно, что системы координат должны устанавливаться для всей Земли в целом, а не так, чтобы они соответствовали поверхности геоида только на определенной территории.

Международные геодезические системы в настоящее время основаны на *международной земной системе отсчета*, которая принята в 1988 г. Эта система контролируется базирующейся в Париже *Международной службой вращения Земли (IERS - International Earth Rotation and Reference Systems Service)*. Эта организация отвечает за оценку параметров вращения и координат Земли, за поддержание всемирного времени, стандартных небесной (ICRS) и земной (ITRS) систем отсчета. Кроме того, организация ответственна за добавление дополнительных секунд ко времени UTC. До 1988 г. аналогичные функции выполняла организация с другим названием – *Международное бюро времени (BIH, Bureau International de l'Heure)*.

Создание международной системы отсчета обусловлено необходимостью обеспечения единства астрономических наблюдений, геофизических и геодезических работ, наблюдений за спутниками.

Международную земную систему отсчета (International Terrestrial Reference System - ITRS) иногда неправильно называют системой координат. Она, конечно, включает в себя систему координат, но это обычная известная из математики прямоугольная система координат *OXYZ*. ITRS же по сути представляет собой просто набор международных соглашений (договоренностей), определяющих порядок отсчета прямоугольных координат и времени: где именно находится начало системы координат, куда направлены ее оси и т.д. Эти соглашения заключаются в следующем.

Система координат в ITRS является геоцентрической, то есть ее начало находится в центре масс Земли (включая массу океанов и атмосферы). Ось Z направлена в *опорный полюс (IRP, IERS Reference Pole)*. Это точка, которая практически совпадает со средним положением земного полюса по результатам измерений с 1900 по 1905 г.г.

Ось X лежит в плоскости *опорного меридиана (IRM, IERS Reference Meridian)*. Исторически так сложилось, что этот меридиан располагается на 5,31" восточнее «традиционного» гринвичского меридиана, проходящего через пассажный инструмент обсерватории.

Ось Y перпендикулярна к двум остальным осям.

Для измерений в ITRS используется система СИ, то есть координаты измеряются в метрах. Шкалой координатного времени локальной геоцентрической системы является шкала *TCG (Geocentric Coordinate Time)*, которая практически совпадает с атомным временем TAI.

Перечисленные положения и составляют ITRS, но они лишь теоретически описывают положение и ориентацию системы координат. А каким образом определить координаты какого-нибудь земного пункта в этой системе? Ведь невозможно измерить его удаление от оси вращения Земли, плоскости экватора, центра масс планеты.

Физически ITRS связана с Землей с помощью *Международной земной отсчетной основы (ITRF - International Terrestrial Reference Frame)*. Это понятие также часто неправильно называют системой координат. Слово *frame* переводится как каркас, основа, на которой что-то держится. И в данном случае ITRF является тем «каркасом», которым прямоугольная система координат «прикреплена» к Земле.

ITRF представлена в виде набора прямоугольных координат (X, Y, Z) ряда пунктов на земной поверхности. Действительно, если нескольким пунктам на земной поверхности приписать конкретные значения координат X, Y, Z , то тем самым и будет задано, где находится начало системы координат и как направлены ее оси.

Взаимные расстояния между этими пунктами определяются с миллиметровой точностью самыми разными методами. Это и применение спутниковых навигационных систем, и радиоинтерференметрия со сверхдлинной базой, и лазерные измерения дальности до Луны и спутников. Такая высокая точность позволяет даже отслеживать изменение расстояний между пунктами, вызванное перемещением тектонических плит разных континентов. А эта скорость обычно составляет несколько миллиметров в год.

Различие между ITRS и ITRF можно пояснить следующим простым примером. Допустим, вы хотите нарисовать на листе бумаги оси обычной прямоугольной системы координат OXY таким образом, чтобы начало системы координат располагалось в центре листа, а оси были параллельны его краям. Эти требования являются аналогом ITRS.

Но каким образом практически определить центр листа? Можно считать за центр точку пересечения диагоналей прямоугольного листа, а можно и точку пересечения линий, соединяющих середины сторон. Эти точки совпадут, только если лист бумаги идеально прямоугольный, что, конечно, не так. Да и края листа не совсем параллельны и, следовательно, направление осей координат также неоднозначно. Кроме того, при графическом выполнении этих построений с помощью линейки и транспортира неизбежны небольшие случайные погрешности, вызванные неточностью этих инструментов.

Таким образом, в зависимости от того, каким образом строилась система координат, какие точки листа бумаги были выбраны в качестве «опорных» и с учетом случайных погрешностей, могут быть реально построены несколько разные системы координат – чуть-чуть сдвинутые и повернутые друг относительно друга. Вот эти «опорные» точки, определяющие фактическое расположение системы координат, и являются аналогом ITRF, отсчетной основы.

Изменение местоположения пунктов, вызванное движением земной коры, приводит к изменению положения системы координат в теле Земли. Отслеживанием этих изменений и занимается IERS. ITRF непрерывно обновляется на основе измерений координат и скоростей перемещения более, чем 500 пунктов путем совместного уравнивания результатов этих измерений.

Поскольку оси системы координат задаются координатами пунктов, то изменение этих координат (например, их смещение в одну и ту же сторону), может привести к повороту системы координат, что в свою очередь может быть интерпретировано как непредсказуемое изменение параметров вращения Земли. Поэтому стабильность положения осей ITRS обеспечивается принятием условия отсутствия глобального вращения коры Земли из-за горизонтальных тектонических движений.

В ITRF учитываются и вертикальные перемещения пунктов. Эти перемещения вызваны не только тектоническими процессами, но и приливными воздействиями. Луна вызывает не только морские приливы, но и приливы земной коры (конечно, гораздо меньшие по величине). Учитывается даже воздействие атмосферы на земную кору. Установлено, например, что Сибирский антициклон (область повышенного атмосферного давления) вызывает проседание земной коры на 1,5 см.

Таким образом, ITRF непрерывно корректируется и обновляется. В настоящее время стандартами Международной службы вращения Земли рекомендуется использовать систему ITRF 2005.

Сама по себе ITRS не включает в себя какой-либо эллипсоид и не предполагает применения геодезической системой координат. Но, если необходимо такую систему координат использовать, то согласно стандартам IERS для целей геодезии необходимо использовать эллипсоид GRS80 с параметрами:

$$a=6378137,0 ; 1/\alpha=298,257222101.$$

Разумеется, его центр и оси совпадают с центром и осями прямоугольной системы координат.

Частью ITRF является ETRF (*European Terrestrial Reference Frame*), то есть Европейская земная отсчетная основа. Она предназначена для обеспечения единства геодезических измерений в Европе и отличается большей густотой пунктов (их более 130). Обработка координат пунктов в этой системе выполняется точнее и быстрее, поскольку не надо учитывать тектонические перемещения – ведь все пункты находятся на одной тектонической плите. В настоящее время (2009г.) рекомендуется использовать ETRF 2000.

Новая система геодезических координат в Европе должна быть основана на ITRS, а в качестве эллипсоида будет использоваться GRS80. Поскольку впервые европейскую опорную сеть ETRF реализовали в 1989 г., то и европейскую систему отсчета называют ETRS 89 (*ETRS, European Terrestrial Reference System*). В 1999 г. Европейский Союз утвердил эту систему в качестве межгосударственной. Это не запрещает странам Европы использовать свои национальные системы геодезических координат, но они обязаны опубликовать параметры, обеспечивающие трансформирование координат из одной системы в другую с точностью до 30 см.

Кроме того, что система координат должна быть привязана к Земле, должно быть определено и ее положение по отношению к другим небесным телам (звездам).

Ориентация Земли в пространстве обеспечивается с помощью *международной небесной системы отсчета (ICRS, International Celestial Reference System)*. Ее центр находится в барицентре (центре масс) солнечной системы, а направления осей определены с высокой точностью с помощью квазаров (quasar — сокращение от QUASi stellAR radio source— «квазизвёздный радиоисточник»). Это внегалактические объекты (предположительно связанные с черными дырами) очень малых угловых размеров. Наподобие того, как ITRS физически задана координатами пунктов на земной поверхности, то есть с помощью ITRF, точно так же физически ICRS задана с помощью *International Celestial Reference Frame (ICRF)*, представляющей собой набор координат на небесной сфере множества внегалактических источников излучения

3.10. Всемирная геодезическая система WGS-84

Как уже отмечалось, различие систем отсчета и систем координат в разных странах препятствует международной аэронавигации. В соответствии со стандартами международной организации гражданской авиации (ИКАО) с 1998 г. все государства – члены ИКАО должны публиковать в документах

аэронавигационной информации координаты всех пунктов в общей для всех *Всемирной геодезической системе WGS-84 (World Geodetic System)*. Описание системы и правила ее применения приведены в документе ИКАО «Руководство по всемирной геодезической системе – 1984 (WGS-84)» (Doc.9674, “*World Geodetic System Manual*”).

WGS-84 представляет собой глобальную отсчетную основу (*reference frame*), которая в русском переводе документа 9674 названа «глобальной опорной системой». С ее помощью определены:

- прямоугольная система координат,
- эллипсоид, на котором задана геодезическая система координат,
- модель гравитационного поля Земли.

Система появилась не на пустом месте. Еще с конца 50-х годов XX века усилия министерства обороны США были направлены на создание геодезической системы, которая бы обеспечивала единство геодезических, астрономических и гравиметрических измерений. Последовательно создавались такие общеземные системы как WGS-60, WGS-66, WGS-72, WGS-84. Начиная с WGS-66, эти системы включали в себя и мировой геоид, представленный в виде модели гравитационного поля Земли.

WGS-72 разрабатывалась как геодезическая основа первой в мире спутниковой навигационной системы Transit. В качестве общеземного эллипсоида в этой системе использовался эквипотенциальный эллипсоид GRS 67, предложенный Международным союзом по геодезии и геофизике в 1967 г. Поверхность этого эллипсоида является уровенной (эквипотенциальной) поверхностью для нормального потенциала силы тяжести, определяемого зональным коэффициентом второй степени нулевого порядка ($C_{2,0}$). Он является константой данного эллипсоида.

Впоследствии появились новые методы определения формы физической поверхности Земли (спутниковые, лазерные, интерферометрические) и выяснилось, что эллипсоид в WGS-72 недостаточно точно ориентирован в пространстве. Кроме того, Международный союз по геодезии и геофизике принял новую геодезическую систему отсчета *GRS 80 (Geodetic Reference System)*, которая была рекомендована для повсеместного использования.

Система GRS 80 представляет собой сочетание геоида, общеземного эллипсоида и модели гравитационного поля Земли. Начало системы координат размещено в центре масс Земли, оси направлены в международный условный полюс и по направлению нулевого меридиана, определенного международным бюро времени ВИН (с 1987 г. его функции выполняет IERS).

Некоторые страны стали внедрять у себя новую систему. В США это вылилось в принятие геодезической системы *NAD 83 (North American Datum 1983)*. До этого в США использовалась NAD 27, основанная на эллипсоиде Кларка 1866 г. с параметрами

$$a=6378206,4; \quad 1/\alpha=298,2786982.$$

Это был классический референц-эллипсоид, привязанный к Земле исходными геодезическими датами (в геодезическом пункте Meades Ranch в штате Канзас).

NAD 83, в отличие от NAD 27, уже не является астрономо-геодезической системой. Координаты ее пунктов не отсчитываются от исходного пункта, а определены индивидуально для каждого из них относительно нулевого меридиана и плоскости экватора.

NAD 83 принята США, Канадой, Мексикой, странами Центральной Америки и используется ими как национальная система для решения невоенных задач геодезии, картографии, геологии.

Тем не менее, Министерство обороны США (DoD, Department of Defence) приняло решение о создании собственной системы отсчета (WGS-84), ориентированной на решение военных задач и навигацию по спутниковой навигационной системе GPS Navstar, также финансируемой этим министерством.

WGS-84 введена в 1987 г. и очень близка к NAD 83. Направления осей их систем прямоугольных координат совпадают. Совпадают и большие полуоси эллипсоидов, но малые полуоси незначительно различаются. Примерно на 2 метра сдвинуты начала отсчета координат, поскольку в общеземной системе WGS-84 начало совпадает с центром масс планеты, а в NAD 83 эллипсоид GRS 80 используется как локальный референц-эллипсоид, близкий к геоиду для определенной территории. В WGS-84 используется менее точная модель гравитационного поля Земли и, следовательно, менее точно определяются вертикальные координаты.

Благодаря повсеместному использованию GPS Navstar система WGS-84 получила широкое распространение и установлена ИКАО для международного применения.

Система отсчета (reference system) у WGS-84 в принципе совпадает с ITRS, то есть:

- начало прямоугольной системы координат расположено в центре масс Земли (с учетом массы океанов и атмосферы),
- ось Z направлена на опорный полюс, установленный IERS,
- ось X лежит в плоскости нулевого опорного меридиана, установленного IERS,
- ось Y дополняет систему координат до правосторонней.

Вследствие такой ориентации, ось Z совпадает с направлением на условный земной полюс (Conventional Terrestrial Pole), установленный Международным бюро времени (ВН) на эпоху 1984 г, с точностью до $0,005''$, а ось X с направлением нулевого меридиана ВН с такой же точностью.

Ориентация осей не меняется во времени из-за движения земной коры.

Геодезическая система координат WGS-84 задана на эллипсоиде с параметрами

$$a=6378137,0; \quad 1/\alpha=298,257223563,$$

Центр эллипсоида совпадает с началом прямоугольной системы координат.

Физически система координат связана с Землей опорной основой *TRF* (*Terrestrial Reference Frame*), представляющей собой сеть опорных пунктов. Координаты этих пунктов на эпоху 1984 г. были определены с высокой точностью на основе геодезических измерений, а также с помощью спутниковой системы Transit

Первоначальная (original) опорная основа, определенная на эпоху 1984 г., получила обозначение *WGS-84 (orig.)* и действовала до 1994 г.

Позже координаты пунктов опорной сети были не раз переопределены с еще более высокой точностью с помощью GPS Navstar. Так, в 2002 году принята версия *WGS-84 (G1150)*. Цифры в скобках означают номер недели в системе отсчета времени, используемой в GPS Navstar.

Для каждой из 17 опорных станций TRF с высокой точностью определены их прямоугольные (X,Y,Z) , геодезические (B,L) координаты и высота над поверхностью эллипсоида (геодезическая высота). Тем самым эллипсоид и прикреплен к физической поверхности Земли. Большая часть этих станций используется для уточнения параметров орбиты GPS Navstar. Поэтому точность задания координат станций (а, следовательно, и задания самого эллипсоида) определяет предельную точность измерения координат ВС с помощью спутниковой навигационной системы.

Для определения координат станций с сантиметровой точностью учитываются горизонтальные перемещения тектонических плит (их скорость может составлять несколько сантиметров в год), вертикальные приливные периодические перемещения земной коры (с амплитудой до 42 см), неравномерность скорости вращения Земли.

Теоретически, системы прямоугольных координат, принятые в ITRS и WGS-84, одинаковы. Но ITRS гораздо точнее привязана к центру масс Земли, поскольку ее отсчетная основа ITRF насчитывает несколько сотен пунктов. Разница между координатами в этих двух системах не превышает 10 см.

Основные параметры Всемирной геодезической системы WGS-84 приведены в табл.3.1.

Составной частью системы отсчета WGS-84 является модель гравитационного поля Земли. В качестве такой модели используется упоминавшаяся выше *EGM 96 (Earth Gravitational Model)*. Полный вариант этой модели включает в себя гармоники до 360 степени и 360 порядка (всего 130317 коэффициентов). Но в зависимости от требуемой точности решения конкретных задач используются и более простые менее точные варианты модели. Для вычисления параметров орбит спутников используется модель степени и порядка 70. В профессиональных бортовых приемниках GPS - до 41 степени и порядка, а в более простых – до 18. В любительских приемниках

потенциал может не рассчитываться по модели, а просто интерполироваться между значениями, заданными для нескольких сотен точек планеты.

Таблица 3.1

Основные параметры и физические константы, принятые в WGS-84

Параметр	Значение
Большая полуось, a	6378137,0 м
Малая полуось, b	6356752,3142 м
Знаменатель сжатия, $1/\alpha$	298,257223563
Эксцентриситет, e	0,081819190842622
Квадрат эксцентриситета, e^2	0,00669437999014
Универсальная гравитационная постоянная, f	$6,673 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / \text{кг} \cdot \text{с}^2$
Гравитационная постоянная Земли (произведение гравитационной постоянной на массу Земли, включая атмосферу)	$3986004,418 \cdot 10^8 \text{ м}^3 / \text{с}^2$
Средняя угловая скорость вращения Земли	$7292115,0 \cdot 10^{-11} \text{ рад/с}$
Коэффициент второй степени нулевого порядка модели гравитационного поля, $C_{2,0}$	-0,00484166774985
Нормальный потенциал эллипсоида, U_0	$62636851,7146 \text{ м}^2 / \text{с}^2$
Ускорение силы тяжести на экваторе эллипсоида, g_e	$9,7803253359 \text{ м} / \text{с}^2$
Ускорение силы тяжести на полюсе эллипсоида, g_p	$9,8321849378 \text{ м} / \text{с}^2$
Скорость света в вакууме, c	299 792 458 м/с

Система WGS-84 включает в себя и определенным образом установленный геоид. Рассмотрим, как это сделано.

Если бы Земля была жидкой и обладала равномерной плотностью, то в результате вращения она бы приняла форму идеального эллипсоида, поверхность которого являлась бы уровенной поверхностью. Поэтому любой эллипсоид вращения можно определить не только чисто геометрически (его размерами, сжатием), но и рассматривать как эквипотенциальную (уровенную) поверхность. Для этого необходимо задать четыре параметра:

- большую полуось эллипсоида,
- второй нормализованный гармонический зональный гравитационный коэффициент (он определяет сжатие эллипсоида),
- угловую скорость вращения Земли,
- гравитационную постоянную Земли (это произведение универсальной гравитационной постоянной на массу Земли).

С этой точки зрения и поверхность эллипсоида WGS-84 (она практически совпадает с GRS 80) можно рассматривать как уровенную поверхность (поверхность с постоянным значением потенциала) некоторой «идеализированной» Земли. Однако многочисленные исследования

показали, что эллипсоид WGS-84, который используется для задания геодезических координат, не является нормальной Землей. Напомним, что нормальной Землей называют такой правильный эллипсоид, на поверхности которого потенциал наименьшим образом отличается от потенциалов, фактически измеренных в разных точках планеты. Полуоси этих двух эллипсоидов (нормального и WGS-84) отличаются на 0,54 м.

Одним из параметров WGS-84 является нормальный потенциал U_0 , то есть потенциал нормальной Земли. Конечно, на самом деле эквипотенциальные (уровенные) поверхности реальной Земли вовсе не имеют форму эллипсоида вследствие неравномерности распределения масс внутри Земли. Та из этих неправильных поверхностей, на которой потенциал равен потенциалу на «нормальной» Земле, и принята за поверхность геоида в WGS-84.

Математически поверхность геоида может быть определена путем задания в каждой точке волны геоида N (*undulation*), показывающей насколько выше (или ниже) находится геоид по отношению к эллипсоиду WGS-84. Волна геоида может быть рассчитана с помощью модели гравитационного поля EGM 96 с точностью до 0,5 м. Среднее значение волны геоида на всей поверхности Земли составляет -0,57 м, среднее квадратическое отклонение 30,56 м, минимальное отклонение -106,99 м, а максимальное +85,39 м.

Волна геоида WGS-84 в Пулковско составляет +18 м. Для сравнения отметим, что высота геоида, принятого в России (он проходит через ноль Кронштадтского футштока), над эллипсоидом Красовского составляет в этом же месте +12,8 м. Конечно, различие в высотах в основном вызвано разными эллипсоидами. Но и уровни геоидов несколько различаются. Ведь в нашей стране его уровень определен осреднением уровня Балтийского моря, а геоид WGS-84 установлен значением потенциала, «среднего» для всей планеты.

3.11. Система геодезических параметров Земли ПЗ-90

Подобно тому, как для обеспечения американской спутниковой навигационной системы GPS Navstar была создана геодезическая система WGS-84, так и для обеспечения функционирования российской ГЛОНАСС была создана ПЗ-90. Постановлением правительства Российской Федерации (№568 от 2000 г.) с 2002 г. эта система принята в качестве государственной для целей навигации и обеспечения орбитальных полетов.

ПЗ-90 («Параметры Земли-90») является системой отсчета (reference system), которая включает в себя:

- геоцентрическую прямоугольную систему координат (X, Y, Z),
- эллипсоид с заданной на нем системой геодезических координат (B, L, H),

- параметры связи с Международной земной отсчетной основой ITRF 2000 (на эпоху 2000 года),

- модель гравитационного поля Земли.

Система прямоугольных координат ориентирована следующим образом:

- начало координат совмещено с центром масс Земли, включая массы океанов и атмосферы,

- ось Z направлена на условный Северный полюс Земли, как определено Международной службой вращения Земли (*International Earth Rotation and Reference Systems Service*);

- ось X направлена в точку пересечения плоскости экватора и начального (нулевого) меридиана, установленного Международным бюро времени (*Bureau International de l'Heure*);

- ось Y дополняет геоцентрическую прямоугольную пространственную систему координат до правой.

Можно видеть, что *система отсчета* ПЗ-90 (соглашение о начале координат, направлении осей) практически совпадает с международной, то есть с ITRS. Но отличается *отсчетная основа (reference frame)*, то есть набор пунктов на земной поверхности, «закрепляющий» данную систему координат. Для ITRS, как рассмотрено выше, такой основой является ITRF, а для ПЗ-90 – пункты космической геодезической сети (КГС) Российской Федерации. Координаты этих пунктов определялись с использованием специальных геодезических спутников ГЕОИК, спутников систем ГЛОНАСС и ЭТАЛОН. Разумеется, использовались результаты геодезической и гравиметрической съемки, лазерные и радиотехнические дальномерные измерения и другие методы. В этой сети 26 пунктов находятся на территории бывшего СССР и еще 7 в Антарктиде.

Поскольку набор исходных данных, закрепляющих систему координат, использовался разный, то и системы координат, заданные ПЗ-90 и ITRF, оказались несколько смещенными друг относительно друга (хотя теоретически должны совпадать). В документах, описывающих ПЗ-90, приведены параметры ориентирования этой системы относительно WGS-84, которая в свою очередь совпадает с ITRF с сантиметровой точностью.

В первоначальной версии ПЗ-90 сдвиг начал этих систем координат составлял несколько десятков сантиметров и, кроме того, имелся поворот систем вокруг оси Z примерно на одну треть угловой секунды. Но с 2007 года, после обработки новых измерений, введена очередная версия системы, получившая обозначение ПЗ-90.02. В этой версии направления осей точно совпадают с WGS-84 (поворота нет), а начало координат сдвинуто по направлениям осей на гораздо меньшую величину (максимум по оси X – на 36 см). Таким образом, системы прямоугольных координат WGS-84, ITRF и ПЗ-90.02 можно считать идентичными с практической точки зрения, то есть даже при решении навигационных задач, требующих высокой точности (например, заход на посадку).

ПЗ-90 включает в себя также эллипсоид, центр которого и направления осей совпадают с центром и направлениями осей прямоугольной системы координат. Этот эллипсоид, так же как в WGS-84, является общеземным эллипсоидом, призванным аппроксимировать геоид на всей территории планеты. Земля у нас на всех одна, но параметры эллипсоидов ПЗ-90 и WGS-84 несколько отличаются, поскольку подобраны по разным наборам исходных данных о геоиде (соответственно отечественным и американским).

Модель гравитационного поля Земли представляется в виде параметров нормального и аномального гравитационных полей.

Нормальное гравитационное поле, то есть поле «усредненной» Земли в форме эллипсоида, может быть представлено в двух вариантах.

1) В виде нормированных гармонических коэффициентов нормального потенциала. Этот способ представления аналогичен рассмотренным ранее и используемым в других моделях поля.

2) В виде семи точечных масс, расположенных на оси вращения Земли не очень далеко от ее центра (до 300 км). Расположение и величина этих масс подобраны так, чтобы создаваемое ими результирующее поле соответствовало нормальному гравитационному полю Земли.

Аномальное гравитационное поле, характеризующее отклонение от нормального, также может быть представлено разными способами:

- в виде коэффициентов разложения геопотенциала в ряд по сферическим функциям до 36 степени и порядка,
- в форме параметров системы 320 точечных масс.
- в форме параметров 60 точечных масс,
- в виде коэффициентов разложения геопотенциала в ряд по сферическим функциям до 200 степени и порядка.

Последний из этих способов обеспечивает расчет высоты квазигеоида над эллипсоидом, со средней квадратической погрешностью 2 м.

Каждый пользователь ПЗ-90 выбирает оптимальный вариант модели гравитационного поля Земли для решения конкретной прикладной задачи. Например, в бортовых приемниках ГЛОНАСС используются гармонические коэффициенты геопотенциала до 8 степени и порядка включительно. На наземных станциях для определения параметров орбит спутников используются, конечно, более точные модели. В табл.3.2 приведены основные данные, касающиеся ПЗ-90.02.

Таблица 3.2

Основные параметры и физические константы, принятые в ПЗ-90.02

Параметр	Значение
Большая полуось, a	6 378 136,0 м
Малая полуось, b	6 356 751,36 м
Знаменатель сжатия, $1/\alpha$	298,257839303
Квадрат эксцентриситета, e^2	0,0066943662
Гравитационная постоянная Земли (произведение гравитационной постоянной на массу Земли, включая атмосферу)	$3986004,418 \cdot 10^8 \text{ м}^3/\text{с}^2$
Средняя угловая скорость вращения Земли	$7292115,0 \cdot 10^{-11} \text{ рад/с}$
Коэффициент второй степени нулевого порядка модели гравитационного поля, $C_{2,0}$	-0,00484164953
Нормальный потенциал эллипсоида, U_0	$62636861,4 \text{ м}^2/\text{с}^2$
Ускорение силы тяжести на экваторе эллипсоида, g_e	$9,7803284 \text{ м/с}^2$
Скорость света в вакууме, c	299 792 458 м/с

3.12. Геодезическая система координат СК-95

Тем же постановлением Правительства Российской Федерации, которым в качестве государственной для обеспечения навигации и орбитальных полетов была введена система ПЗ-90, была введена также геодезическая система координат СК-95. Она предназначена для обеспечения геодезических и картографических работ и заменила использовавшуюся более 50 лет систему координат СК-42.

Необходимость замены была вызвана недостатками СК-42, выявившимися по мере накопления новых результатов геодезических измерений, выполненных в последние десятилетия. Дело в том, что основанная на этой системе координат государственная геодезическая сеть 1 класса уравнивалась отдельными блоками. На границах блоков результаты предыдущего уравнивания принимались за абсолютно точные. По такому же принципу уравнивались сети 2 класса, заполнявшие полигоны сети 1 класса. СК-42 распространялась по территории страны в виде системы нанизанных друг на друга блоков, каждый из которых уравнивался отдельно. В результате на границах блоков, а также на границах рядов 1 и 2 классов, выявилась деформация сети. Координаты точек в СК-42 оказались неточными, причем в разных регионах страны в разной степени.

К 1991 году заново было выполнено уравнивание практически всех имевшихся на то время геодезических данных. При этом выявилось, что

общие региональные деформации на севере и востоке страны достигают 20-30 м, а локальные (на границах блоков) составляют 10 м и более. Таким образом, СК-42 не удовлетворяла современным требованиям к точности. Было принято решение о введении новой системы координат, которая и получила обозначение СК-95. Носителем этой системы координат являются 164 тысячи пунктов, совместно уравненных астрономической, космической и доплеровской геодезических сетей.

При решении вопроса о выборе эллипсоида для этой системы координат рассматривался вариант выбора общеземного эллипсоида с центром в центре масс Земли вместо референц-эллипсоида Красовского, используемого в СК-42 и подобранного из соображений его близости к геоиду на территории СССР. Но, поскольку СК-95 предназначена для обеспечения картографии, такое решение потребовало бы переиздания практически всех карт для территории страны. Ведь размеры и ориентация этих эллипсоидов существенно различны.

Поэтому было решено оставить тот же эллипсоид Красовского, но изменить его ориентацию в теле геоида. Геодезические координаты исходного пункта Пулково остались прежние, то есть они совпадают в СК-42 и СК-95. Но эллипсоид, упрощенно говоря, как бы повернут, чтобы устранить деформации геодезической сети и более точно соответствовать результатам нового уравнивания. Направления осей эллипсоида СК-95 совпадают с направлением осей общеземного эллипсоида ПЗ-90. Центры этих двух эллипсоидов не совпадают на несколько десятков метров, но величины смещения по осям координат известно достаточно точно. Это позволяет переходить от координат в СК-95 к координатам в общеземных системах, например, в WGS-84.

Главная проблема, связанная с введением СК-95 заключается в том, что изменились координаты всех объектов местности. И чем дальше от Пулково, тем, как правило, сильнее. В связи с этим перед картографами и геодезистами встает задача переиздания многих видов карт для территории России, особенно для районов Сибири и Дальнего Востока. Около 20% карт должны быть переизданы и для Европейской части территории страны. Речь идет о картах достаточно крупного масштаба – 1:100000 (в 1 см 1 км) и крупнее. Следовательно, это не касается аэронавигационных маршрутных карт, которые обычно издаются в масштабах 1:1000000 (в 1 см 10 км), 1:2000000 (в 1 см 20 км). На таких картах изменение координатной сетки в связи с введением новой системы координат практически незаметно (сдвиг составит доли миллиметра карты).

С 2002 года издание новых карт и геодезические работы должны производиться в новой системе координат. Введение СК-95 позволило в 10-15 раз повысить точность определения координат и с минимальными издержками обеспечить переход к геоцентрическим (общеземным) системам координат, что необходимо, в частности, для навигации с использованием спутниковых систем.

Необходимо упомянуть, что в ряде научных публикаций содержится критика новой системы, отмечаются ошибки, которыми сопровождалось, по мнению авторов публикаций, ее введение и уравнивание сетей. Как бы то ни было, очевидно, что по мере дальнейшего развития геодезических сетей страны и в результате научных исследований появятся новые, более совершенные системы координат.

3.13. Преобразование геодезических координат.

Необходимость преобразования. Для представления аэронавигационных данных и создания карт каждое государство использует геодезическую систему координат, основанную на своем референц-эллипсоиде. Поэтому координаты одной и той же точки в различных системах координат имеют разные значения. И наоборот, одним и тем же значениям широты и долготы соответствуют на картах разных государств различные точки. Расстояние между ними может достигать сотен метров.

До тех пор, пока точность определения места самолета с помощью навигационных средств была невысока, различие между системами координат не имело существенного значения. Действительно, погрешность в сотню-другую метров не была существенной, когда само место самолета могло быть определено с погрешностью в лучшем случае один-два километра, а требования к точности выдерживания линии заданного пути были не очень жесткими (ширина воздушной трассы обычно 10 км). Но с появлением спутниковых навигационных систем, способных даже в обычном режиме работы определить координаты с точностью 15-20 м, расхождение систем координат стало играть большую роль. Если навигационная система выдает координаты в одной системе, а координаты порога ВПП, на которую нужно выполнить посадку, заданы в другой, то очевидно, что воздушное судно не попадет в заданную точку.

Как следует из материала предыдущих глав, в настоящее время в России могут использоваться следующие виды систем координат.

1) Различные системы прямоугольных координат $OXYZ$, начала которых совпадают с центром масс Земли или с центрами разных референц-эллипсоидов. Направления осей этих систем также могут несколько различаться.

2) Всемирная геодезическая система WGS-84. Именно в этой системе все государства-члены ИКАО должны публиковать координаты точек в своих документах аэронавигационной информации и в ней же определяются координаты с помощью американской спутниковой навигационной системы GPS Navstar (впрочем, некоторые виды бортовых приемников позволяют выбрать из меню другую систему координат).

3) Геоцентрическая система ПЗ-90.02, используемая в России для навигации с использованием спутниковой системы ГЛОНАСС.

4) Геодезическая система координат СК-95, которая с 2002 г. используется в России для издания карт и геодезических работ.

5) Геодезическая система координат СК-42, которая использовалась до введения СК-95 и в которой изданы практически все карты для территории Российской Федерации.

В связи с этим в практике аэронавигационного обеспечения полетов возникают задачи, связанные с необходимостью пересчета координат точек из одной системы координат в другую. Ту систему координат, в которой координаты точки известны, будем для краткости называть *старой* системой, а относящиеся к ней значения обозначать индексом 1. *Новой* будем называть ту систему координат, в которой координаты этой же точки необходимо определить. Соответственно, относящиеся к ней величины будут обозначаться индексом 2.

Преобразование прямоугольных координат. Любое изменение прямоугольной системы координат можно представить в виде двух операций (рис. 3.21):

- параллельного переноса осей координат, то есть смещения начала новой системы по отношению к старой по направлению каждой из осей на определенную величину (Δx , Δy , Δz);

- поворота системы координат вокруг каждой из трех осей координат.

Параллельный перенос начала координат приводит просто к изменению координат любой точки на величину переноса по соответствующей оси.

Изменение координат, связанное с *поворотом осей*, может быть рассчитано разными способами. Классический математический метод основан на использовании *направляющих косинусов*, то есть косинусов углов между осями старой и новой систем. Другой метод основан на использовании так называемых *углов Эйлера*, характеризующих три последовательных поворота старой системы координат до ее совпадения с новой. Сравнительно новым является метод *кватернионов* (именно он используется при программировании компьютерных игр).

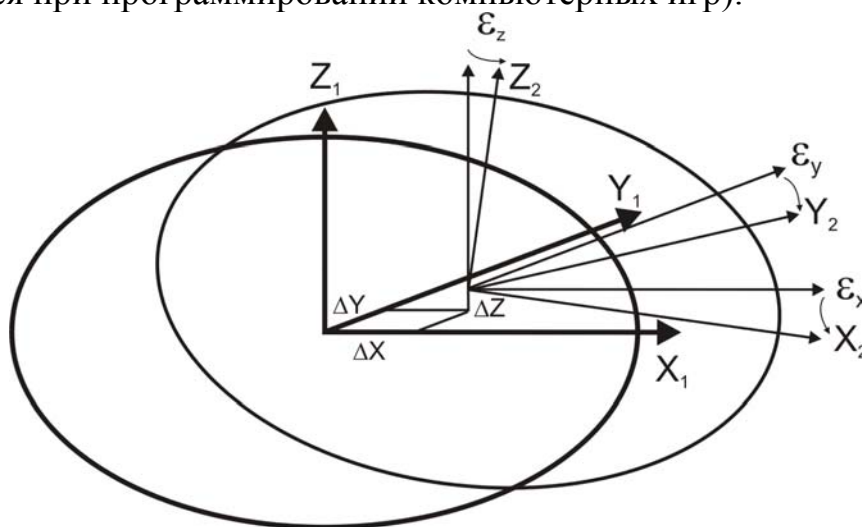


Рис. 3.21. Параллельный перенос и поворот систем координат

Для преобразования координат, связанных с Землей (эллипсоидами) наиболее распространен и удобен *способ Гельмерта* (Friedrich Robert Helmert, 1843-1917). Он основан на том, что углы поворота осей таких систем очень малы (обычно составляют доли угловой секунды или даже равны нулю). В этом случае косинусы этих углов можно принять равными единице, а синусы углов – равными самим углам, выраженным в радианах.

Если координаты точки в старой системе выразить в виде вектора – столбца $[x_1, y_1, z_1]^T$, то соответствующий этой точке вектор координат в новой системе может быть определен по формуле

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = (1 + dm) \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

где $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – координаты центра старой системы координат, выраженные в новой системе координат,

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ – углы поворота новой системы координат вокруг соответственно осей OX, OY, OZ старой системы; они должны быть выражены в радианах; угол считается положительным при повороте по часовой стрелке, если смотреть в направлении оси (правило буравчика),

- $(1 + dm)$ – масштабный множитель.

Масштабный множитель учитывает возможное различие линейных масштабов в двух системах координат. Обычно он очень близок к единице и поэтому записывается в виде $(1 + dm)$, где dm очень малое число. Величину dm принято указывать в миллионных долях единицы (10^{-6}). Поэтому, если, например, указано $dm = 0,22$, то масштабный множитель

$$(1 + dm) = (1 + 0,22 \cdot 10^{-6}) = 1,00000022.$$

Чисто математический смысл масштабного множителя заключается в том, что в общем случае оси новой системы координат могут быть растянуты или сжаты по сравнению с осями старой. Или, что то же самое, единицы измерения расстояний по осям старой и новой систем могут быть различны (например, в старой – километры, в новой – мили).

На самом деле, на практике, единицы, конечно, используются одинаковые, а масштабный множитель имеет более формальный и прозаический смысл, который заключается в следующем. Каждая из двух систем координат физически задана своей отсчетной основой (reference frame), то есть координатами пунктов на земной поверхности. Если координаты пунктов точно известны одновременно в обеих системах координат, то можно математически найти параметры $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ преобразования координат из одной системы в другую. Но координаты каждого пункта включают в себя случайные погрешности их определения, поэтому не существует таких параметров, которые позволили бы *абсолютно*

точно пересчитать координаты каждого пункта из одной системы в другую. В связи с этим на практике параметры преобразования оценивают на основе *метода наименьших квадратов*, то есть подбирают такие параметры, чтобы после преобразования сумма квадратов отклонений расчетных значений от фактических была минимальной. Чем больше параметров участвует в формуле преобразования, тем меньшей суммы квадратов отклонений можно добиться, то есть тем точнее выполнить пересчет координат. С этой точки зрения масштабный множитель просто является еще одним параметром преобразования, который позволяет компенсировать погрешности определения координат пунктов опорной основы.

В частном случае, когда масштабный множитель равен единице, а все углы поворота равны нулю, формула (3.13) приобретает совсем простой вид:

$$x_2 = x_1 + \Delta x, \quad y_2 = y_1 + \Delta y, \quad z_2 = z_1 + \Delta z.$$

Численные значения элементов трансформирования из одной системы в другую приведены в различных официальных источниках (ГОСТ, Интерфейсный контрольный документ ГЛОНАСС, «Параметры Земли-90» и других), а также в научных публикациях. Количественно эти значения несколько различаются, поскольку получены, видимо, разными методами и в разное время на основе различных наборов исходных данных. В табл. 3.3 приведены значения из ГОСТ Р 51794-2001 «Аппаратура радионавигационная глобальной спутниковой навигационной системы и глобальной системы позиционирования. Методы преобразования координат определяемых точек» с учетом изменений, внесенных в этот стандарт в 2007 г. в связи с введением новой версии ПЗ-90.02.

Углы поворота осей в табл. 3.3 приведены как в угловых секундах, так и в миллионных долях радиана (в скобках).

Следует отметить, что к параметрам преобразования в СК-42 (или из СК-42 в другие системы) следует относиться с осторожностью, поскольку они не являются в прямом смысле параметрами ориентирования одного эллипсоида относительно другого. Как сказано выше, СК-42 при ее первоначальном уравнивании оказалась деформированной и представляет собой «лоскутное одеяло», сшитое из нескольких региональных блоков. Для каждого из блоков следует подбирать свои параметры преобразования, которые обеспечивают наибольшую точность в данном регионе. В табл. 3.3 указаны «средние» значения параметров для всей территории и в отдельных районах их использование может привести к значительным погрешностям. Поэтому пересчет координат из СК-42 в другие системы (ПЗ-90.02, WGS-84) производить нецелесообразно, а лучше провести геодезическую съемку местности сразу в нужной системе координат.

Таблица 3.3

Элементы трансформирования координат

Из какой системы	В какую систему	dm , (10^{-6})	Δx , м	Δy , м	Δz , м	ϵ_x , " (рад 10^{-6})	ϵ_y , " (рад 10^{-6})	ϵ_z , " (рад 10^{-6})
СК-42	ПЗ-90.02	-0,22	+23,93	-141,03	-79,98	0,00 (0)	-0,35 (-1,6968)	-0,79 (-3,8300)
ПЗ-90.02	СК-42	+0,22	-23,93	+141,03	+79,98	0,00 (0)	+0,35 (+1,6968)	+0,79 (+3,8300)
СК-95	ПЗ-90.02	-0,22	+24,83	-130,97	-81,74	0,00 (0)	0,00 (0)	-0,13 (-0,6302)
ПЗ-90.02	СК-95	+0,22	-24,83	+130,97	+81,74	0,00 (0)	0,00 (0)	+0,13 (+0,6302)
ПЗ-90.02	WGS-84	0,00	-0,36	+0,08	+0,18	0,00 (0)	0,00 (0)	0,00 (0)
WGS-84	ПЗ-90.02	0,00	+0,36	-0,08	-0,18	0,00 (0)	0,00 (0)	0,00 (0)
СК-42	WGS-84	-0,22	+23,57	-140,95	-79,80	0,00 (0)	-0,35 (-1,6968)	-0,79 (-3,8300)
WGS-84	СК-42	+0,22	-23,57	+140,95	+79,80	0,00 (0)	+0,35 (+1,6968)	+0,79 (+3,8300)

Преобразование геодезических координат с использованием прямоугольной системы координат. Осуществляется в три этапа. Сначала осуществляется переход от геодезических координат на старом эллипсоиде к прямоугольным координатам, связанным с этим же эллипсоидом. Затем переход от старой прямоугольной системы координат к новой (связанной с новым эллипсоидом), а затем от новой прямоугольной системы - к геодезическим координатам на новом эллипсоиде.

Для выполнения такого преобразования кроме параметров ориентирования прямоугольных систем координат, указанных в табл. 3.3, необходимо также знать параметры старого и нового эллипсоидов (большие полуоси a_1 , a_2 и эксцентриситеты e_1 , e_2). Параметры некоторых эллипсоидов приведены в табл. 3.4.

Таблица 3.4

Параметры некоторых эллипсоидов

Параметр	Ф.Н.Красовского	ПЗ-90	WGS-84
a	6378245,0000	6 378 136,00000	6378137,0000
b	6356863.01877	6 356 751,36	6 356 752,31425
α	1/298,3	1/298,25784	1/298,257223563
e^2	0.006693421623	0,0066943662	0,00669437999014

Рассмотрим порядок преобразования геодезических координат точки B_1, L_1, H_1 в старой системе координат в координаты B_2, L_2, H_2 этой же точки в новой системе.

Этап I. Переход от старых геодезических координат к прямоугольным координатам, связанным с этим же эллипсоидом.

$$\begin{aligned}x_1 &= (N_1 + H_1) \cos B_1 \cos L_1, \\y_1 &= (N_1 + H_1) \cos B_1 \sin L_1, \\z_1 &= [N_1 (1 - e_1^2) + H_1] \sin B_1,\end{aligned}$$

где N_1 - радиус кривизны первого вертикала эллипсоида в данной точке, рассчитанный, разумеется с использованием параметров старого эллипсоида (a_1, e_1).

Если геодезическая высота H_1 , то есть высота точки над поверхностью старого эллипсоида, равна нулю, то приведенные формулы упрощаются.

Этап II. Переход от старой прямоугольной системы координат к новой прямоугольной системе, связанной с новым эллипсоидом.

Выполняется по формулам Гельмерта (3.14). Координаты x_1, y_1, z_1 преобразуются в x_2, y_2, z_2 .

Этап III. Переход от новой прямоугольной системы координат к новой геодезической системе, то есть заданной на новом эллипсоиде. Необходимо рассчитать геодезические широту, долготу и высоту точки в системе координат нового эллипсоида.

В частном случае, если точка находилась на поверхности старого эллипсоида ($H_1=0$), ее новая широта рассчитывается сразу по формуле

$$B_2 = \arctg \left[\frac{z_2}{D(1 - e_2^2)} \right], \quad (3.15)$$

где

$$D = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

и представляет собой длину проекции радиуса-вектора точки на плоскость экватора.

В противном случае ($H_1 \neq 0$) широта B_2 рассчитывается итерационным методом (путем последовательного приближения).

Первое приближение широты рассчитывается в предположении $H_1=0$, то есть по формуле (3.15). По полученному на этом шаге (или на очередном i -том шаге) значению широты B_{2i} с использованием параметров нового эллипсоида рассчитывается радиус кривизны первого вертикала

$$N_{2i} = \frac{a_2}{\sqrt{1 - e_2^2 \sin^2 B_{2i}}}$$

и с его помощью следующее приближение широты

$$B_{2i+1} = \arctg \left[\frac{z_2}{D - e_2^2 N_{2i} \cos B_{2i}} \right].$$

Затем шаги повторяются: рассчитывается очередное значение радиуса кривизны, широты и т.д. Итерации прерываются, когда разность между широтами, рассчитанными на двух последовательных шагах, станет меньше наперед заданной величины, соответствующей требуемой точности расчета. Даже при точных расчетах обычно требуется не более шести итераций.

Затем рассчитывается геодезическая высота в новой системе координат

$$H_2 = \frac{D}{\cos B_2} - N_2.$$

Здесь B_2 и N_2 соответствуют значениям, полученным на последнем шаге итераций.

Новую геодезическую долготу удобно рассчитывать по формуле

$$L_2 = \arccos \frac{x_2}{D}.$$

Полученное по этой формуле значение всегда окажется положительным. Фактический знак долготы совпадает со знаком y_2 , то есть, если, например, $y_2 < 0$, то долгота западная («с минусом»).

Преобразование геодезических координат по дифференциальным формулам М.С.Молоденского. При использовании данного способа рассчитываются поправки ΔB , ΔL , ΔH к старым геодезическим координатам для получения новых. Этот способ применим только при $|B| < 89^\circ$.

$$\begin{aligned} B_2 &= B_1 + \Delta B, \\ L_2 &= L_1 + \Delta L, \\ H_2 &= H_1 + \Delta H. \end{aligned}$$

В частном случае, когда отсутствуют углы поворота осей, масштабный множитель равен единице, а геодезическая высота точки равна нулю, формулы М.С.Молоденского приобретают вид

$$\Delta B'' = \{-\Delta x \sin B_1 \cos \alpha_1 - \Delta y \sin B_1 \sin L_1 + \Delta z \cos B_1 +$$

$$+(\Delta a/a_1)N_1e_1^2 \sin B_1 \cos B_1 + \\ +\Delta\alpha [M_1 (a_1/b_1) + N_1 (b_1/a_1)] \sin B_1 \cos B_1 / (M_1 \sin 1''),$$

$$\Delta L'' = (-\Delta x \sin L_1 + \Delta y \cos L_1) / (N_1 \cos B_1 \sin 1''),$$

где $\Delta B''$, $\Delta L''$ – поправки к координатам, выраженные в угловых секундах,
 Δa – разность больших полуосей эллипсоидов ($\Delta a = a_2 - a_1$),
 $\Delta\alpha$ – разность сжатий эллипсоидов ($\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$),
 a_1, b_1 – большая и малая полуоси старого эллипсоида,
 M_1, N_1 – радиусы кривизны меридиана и первого вертикала в рассматриваемой точке на старом эллипсоиде,
 $\sin 1''$ – синус одной угловой секунды.

Существуют формулы М.С.Молоденского и для общего случая (с учетом углов поворота осей и геодезической высоты), но они еще более громоздкие и здесь не приводятся.

Преобразование геодезических координат с использованием уравнений множественной регрессии. Данный способ применим для преобразования координат в отдельных регионах (континентального масштаба). Поправки к старым координатам рассчитываются как полиномы девятой степени от широты и долготы точки. Коэффициенты этих полиномов должны быть заранее определены таким образом, чтобы они обеспечивали максимально точное преобразование координат в конкретном регионе.

4. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА СФЕРЕ И ЭЛЛИПСОИДЕ

4.1. Отображение поверхности земного эллипсоида на сферу

Координаты точек на земной поверхности задаются в геодезической системе координат, то есть на поверхности эллипсоида. По известным геодезическим координатам B и L двух точек можно рассчитать с любой точностью расстояние между ними и направление от одной точки на другую, но формулы для расчета в общем случае довольно сложные и громоздкие. Поэтому при решении задач, не требующих очень высокой точности, расчеты выполняются не на поверхности эллипсоида, а на поверхности сферы по более простым формулам.

Для этого необходимо сначала отобразить поверхность эллипсоида на заменяющую его сферу, то есть каждой точке с геодезическими координатами B и L на эллипсоиде поставить в соответствие точку на сфере со сферическими координатами φ и λ .

$$B, L \text{ (на эллипсоиде)} \rightarrow \varphi, \lambda \text{ (на сфере)}$$

Поскольку геодезическая и сферическая долготы по определению совпадают, достаточно преобразовать только геодезическую широту в сферическую и выбрать радиус сферы R таким образом, чтобы результаты расчета расстояний и направлений на сфере были как можно ближе к результатам точного расчета на эллипсоиде. В общем виде отображение поверхности эллипсоида на поверхность сферы (пересчет координат) можно представить формулами

$$\begin{cases} \varphi = f(B), \\ \lambda = L. \end{cases}$$

Разумеется, способов отображения существует бесконечно много и, следовательно, выбирая вид функции f и величину R , можно добиться выполнения желаемых требований к точности расчетов.

Если разложить φ и R в бесконечный тригонометрический ряд и ограничиться первыми двумя его членами, любой способ отображения эллипсоида на сферу можно записать в виде:

$$\begin{cases} \varphi = B - K_{\varphi} e^2 \sin 2B, \\ \lambda = L, \\ R = a(1 - K_r e^2). \end{cases} \quad (4.1)$$

где a и e - соответственно большая полуось и эксцентриситет эллипсоида.

Выбирая разные значения коэффициентов K_{φ} и K_R будем получать разные способы изображения. Рассмотрим некоторые из них.

1) *Отображение с соответствием по нормальям.*

$$\begin{cases} \varphi = B, \\ \lambda = L. \end{cases}$$

Сферические широта и долгота совпадают с геодезическими, то есть по сути ничего пересчитывать не надо.

Этот способ соответствует значениям коэффициентов

$$K_{\varphi} = 0, \quad K_R = \frac{1}{4}.$$

Он называется «с соответствием по нормальям», поскольку нормали к эллипсоиду и сфере принимаются параллельными.

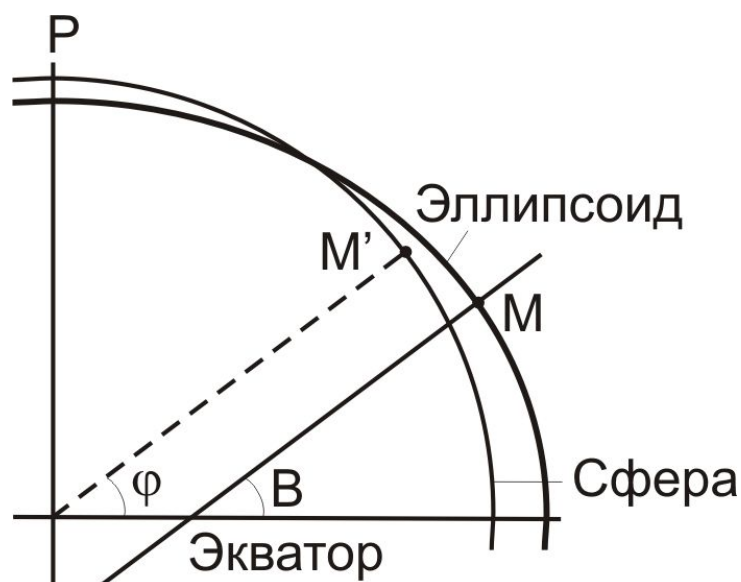


Рис. 4.1. Отображение с соответствием по нормальям

Точка М на эллипсоиде будет отображена в виде точки М' на сфере.

Координаты точек на эллипсоиде и сфере численно совпадают, но расстояния между точками и углы на сфере будут не такими, как на эллипсоиде. Максимальное искажение углов, то есть разность углов (например, пеленгов) на эллипсоиде и сфере, составляет $\Delta\alpha = 23' \cos^2 B$.

Максимальное относительное искажение расстояний $\frac{\Delta S}{S} = 0,5\%$, где S – расстояние между точками, ΔS разность расстояний на эллипсоиде и сфере. Это означает, что расстояние в 1000 км может быть рассчитано с погрешностью в 5 км (полпроцента от самого расстояния). Это слишком большая погрешность. Следовательно, если не пересчитывать геодезическую широту в сферическую, точность решения навигационных задач будет очень низкой.

2) Конформное (равноугольное) отображение.

Значения коэффициентов для такого отображения

$$K_\varphi = \frac{1}{2}, \quad K_R = \frac{1}{4}$$

Углы (пеленги и т.п.) передаются без искажений, то есть будут совпадать на эллипсоиде и сфере. Но не будут совпадать расстояния между точками. Максимальное относительное искажение расстояний

$$\frac{\Delta S}{S} = 0,17\%.$$

3) Способ В.В. Каврайского.

Этот способ обеспечивает минимальное искажение как углов, так и расстояний в среднем на всей поверхности сферы.

$$K_{\varphi} = \frac{3}{8}, \quad K_R = \frac{1}{8},$$

Максимальное искажение углов $\Delta\alpha = 5,7' \cos B$, а расстояний

$$\frac{\Delta S}{S} = 0,08\%.$$

Это означает, что погрешность расчета углов на сфере не превысит $0,1^\circ$. При расчете расстояния величиной 1000 км погрешность будет не более 800 м. Для навигации, основанной на применении традиционных средств, такая точность является вполне приемлемой. Если же нужна более высокая точность, например, для применения спутниковых навигационных систем, расчеты необходимо выполнять по формулам геометрии эллипсоида.

Способ Каврайского получил широкое распространение для расчета расстояний и направлений на поверхности сферы. Если в общие формулы (4.1) подставить параметры эллипсоида Красовского, то они примут вид

$$\begin{cases} \varphi = B - k \sin 2B, \\ \lambda = L, \\ R = 6372,9 \text{ км}, \end{cases} \quad (4.2)$$

где $k = 0,143814^\circ = 8'38'' \approx 8,6'$.

4.2. Основные сведения из сферической тригонометрии

Обычная тригонометрия занимается решением треугольников на плоскости, а сферическая тригонометрия имеет своим предметом решение треугольников на поверхности сферы.

Сферическим треугольником называется фигура, образованная на сфере отрезками трех попарно пересекающихся больших кругов (рис. 4.2).

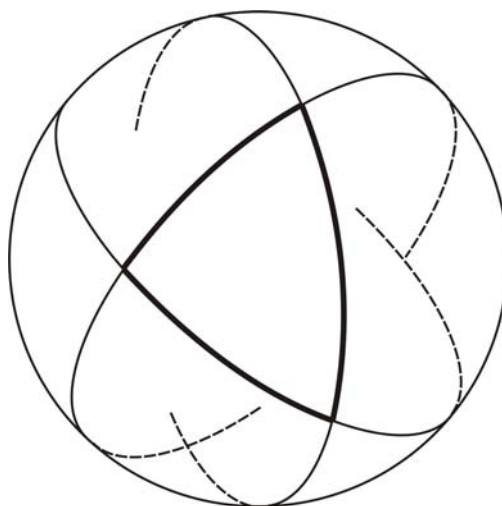


Рис. 4.2. Сферический треугольник

В отличие от плоских треугольников в сферическом треугольнике не только углы, но и стороны измеряются в угловой мере (в градусах или радианах). Длина стороны принимается равной центральному углу, стягиваемому этой стороной (рис. 4.3).

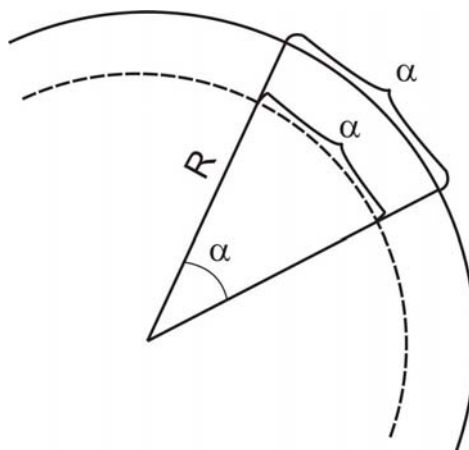


Рис. 4.3. Центральный угол

Таким образом, сферическая тригонометрия, как раздел математики, не имеет дело с линейными величинами (расстояниями) и поэтому радиус сферы не имеет значения. Если же для решения практических задач необходимо знать сторону треугольника в линейных величинах (например, километрах), то угловую величину стороны треугольника, выраженную в радианах, нужно умножить на радиус сферы.

В сферическом треугольнике может быть не более одной стороны, длина которой больше 180° (половины окружности). Действительно, если таких сторон две, то они пересекутся, так и не встретив третьей стороны (получится фигура, называемая двуугольником).

Одна сторона может быть больше 180° , но сферическая тригонометрия такие треугольники не рассматривает. Ведь вместо такого треугольника можно решить другой, служащий дополнением первого до полусферы, а у него все стороны будут меньше 180° . Очевидно, что, зная элементы такого треугольника, можно определить и все элементы первого, искомого.

Принято в сферических треугольниках углы обозначать заглавными буквами, например, A, B, C , а стороны – строчными – a, b, c , одноименными противолежащим углам (рис. 4.4).

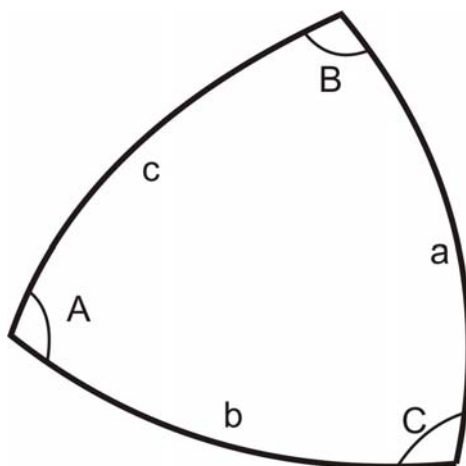


Рис. 4.4. Стороны и углы сферического треугольника

Для сферического треугольника справедливы следующие соотношения:
 - каждая сторона меньше суммы, но больше разности двух других сторон,

- сумма сторон меньше 360° ,
- полупериметр больше каждой из сторон,
- сумма углов больше 180° , но меньше 540° .

Таким образом, в сферическом треугольнике сумма углов всегда больше 180° , в отличие от плоских треугольников, в которых она всегда 180° .

Разность между суммой углов сферического треугольника и 180° называется *сферическим избытком* треугольника.

$$\varepsilon = A + B + C - 180^\circ$$

Если выразить сферический избыток в радианах и знать радиус сферы R , то легко найти площадь треугольника.

$$S = R^2 \varepsilon$$

Условия равенства сферических треугольников почти совпадают с условиями равенства плоских треугольников. Сферические треугольники равны:

- по двум сторонам и углу между ними,
- по стороне и двум прилежащим к ней углам,
- по трем сторонам,
- по трем углам.

Заметим, что последнее из условий в плоской тригонометрии не выполняется – там такие треугольники подобны, но не обязательно равны.

Есть и другие положения сферической тригонометрии, совпадающие с тригонометрией на плоскости:

- против равных сторон лежат равные углы и наоборот,
- против большего угла лежит большая сторона и наоборот,
- биссектрисы пересекаются в центре вписанного в треугольник малого круга и т.д.

Для решения сферического треугольника, то есть нахождения неизвестных его элементов по другим, известным, используются формулы или, как их еще называют, теоремы сферической тригонометрии. Здесь будут приведены лишь некоторые.

Следует иметь в виду, что при необходимости запоминания теорем, целесообразно запомнить их словесную формулировку. Тогда она будет легко применима к любой стороне (углу) треугольника и не будет зависеть от буквенных обозначений элементов в конкретном рассматриваемом треугольнике. Впрочем, можно поступить и по-другому: переобозначить в решаемом треугольнике элементы в соответствии со стандартными обозначениями (рис. 4.4) и подобрать нужную формулу.

1) Формула косинуса стороны.

Косинус одной стороны сферического треугольника равен произведению косинусов двух других сторон плюс произведение синусов тех же сторон на косинус угла между ними.

Например,

$$\cos a = \cos c \cos b + \sin c \sin b \cos A. \quad (4.3)$$

2) Формула синусов.

Синусы сторон сферического треугольника пропорциональны синусам противолежащих им углов.

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}. \quad (4.4)$$

3) Формула косинуса угла.

Косинус угла равен отрицательному произведению косинусов двух других углов, сложенному с произведением синусов тех же углов на косинус стороны, противолежащей первому углу.

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a. \quad (4.5)$$

4) Формула четырех элементов.

Элементами треугольника являются его стороны и углы. Формула связывает четыре элемента, лежащих рядом, то есть идущих подряд. Из них всегда два угла и две стороны. Один угол крайний, другой внутренний в данной последовательности четырех элементов. Аналогично, одна сторона крайняя, другая внутренняя. Например, для треугольника на рис. 4.4 этими элементами могут являться:

a, B, c, A или C, b, A, c . Разумеется, возможны и еще четыре варианта.

Словесная формулировка формулы предложена шотландским математиком Непером.

Произведение косинусов средних элементов равно разности между произведениями синуса средней стороны на котангенс крайней стороны и синуса среднего угла на котангенс крайнего угла.

Например,

$$\cos c \cos B = \sin c \operatorname{ctg} a - \sin B \operatorname{ctg} A. \quad (4.6)$$

5) Формула пяти элементов.

Синус стороны, умноженный на косинус прилежащего к ней угла, равен синусу другой стороны, ограничивающей этот угол, умноженному на косинус третьей стороны минус косинус стороны, ограничивающей угол, умноженный на произведение синуса третьей стороны и косинуса угла, противолежащего первой стороне.

$$\sin a \cos C = \sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A \quad (4.7).$$

Если известны все три стороны, а нужно найти углы, то это можно легко сделать, последовательно применяя формулу косинуса стороны, выразив из нее косинус угла. Аналогично, если известны все углы, то стороны можно найти с помощью формулы косинуса угла, выразив из нее косинус стороны.

Если в сферическом треугольнике один из углов равен 90° , то треугольник называется прямоугольным и вышеприведенные формулы для его решения значительно упрощаются, поскольку синус и косинус 90° равны соответственно единице и нулю.

Но, оказывается, все важные формулы, касающиеся прямоугольного треугольника, можно свести всего к одному правилу. Прежде чем его сформулировать, укажем два допущения, которые нужно не забыть обязательно учесть при применении данного правила:

- прямой угол «не считается» элементом, как бы игнорируется, то есть два катета считаются лежащими рядом,
 - вместо катетов берутся их дополнения до 90° .
- Правило Непера для прямоугольных треугольников:

Если три элемента треугольника лежат рядом, то косинус среднего элемента равен произведению котангенсов крайних элементов.

Если элементы не лежат рядом, то косинус отдельно лежащего элемента равен произведению синусов элементов, лежащих рядом.

Если стороны сферического треугольника малы по сравнению с радиусом сферы, то с достаточным приближением его можно решать как плоский треугольник, имеющий те же стороны, а углы, равные углам сферического треугольника, но уменьшенным на одну треть сферического избытка (теорема Лежандра). Применение данного правила к треугольникам на земной поверхности со сторонами до 200 км дает точность вычисления углов до $0,01''$.

Если стороны треугольника не превышают 7 км, то треугольник можно решать как плоский даже без учета сферического избытка, поскольку сам этот избыток не превышает $0,01''$.

4.3. Практика геодезических расчетов с помощью микрокалькуляторов

Для получения правильных результатов при расчете как по уже приведенным формулам, так и по формулам, которые будут рассмотрены ниже, а также для уменьшения трудоемкости этих расчетов, необходимо отметить некоторые особенности вычислений на микрокалькуляторах и предостеречь от возможных ошибок.

Очевидно, что используемый микрокалькулятор должен иметь возможность вычисления тригонометрических функций, логарифмов, экспоненциальной функции и иметь хотя бы один регистр памяти. Таким требованиям удовлетворяют *научно-инженерные калькуляторы*. Нет необходимости использовать программируемые калькуляторы или такие, в которых можно ввести расчетную формулу, а потом выполнить расчет при любых значениях входящих в формулу параметров. Несмотря на кажущееся их удобство, они, как правило, затрудняют выявление возможной ошибки в вычислениях, поскольку не дают возможности посмотреть промежуточные результаты.

Даже на простом научно-инженерном калькуляторе расчеты можно выполнить быстро и, как правило, без записи промежуточных результатов на бумаге.

Калькулятор имеет возможность записать число из *регистра* (это то, что отображается на индикаторе) в память. Для этого, как правило, используется клавиша $\langle x \rightarrow M \rangle$. Здесь x обозначает число в регистре, M – память (memory). При нажатии этой клавиши значение, которое до этого уже находилось в памяти, пропадает и заменяется значением из регистра.

Число из памяти можно в любой момент снова вызвать в регистр нажатием клавиши $\langle RM \rangle$ (*request memory*). Иногда эта же клавиша обозначена $\langle MR \rangle$.

Для работы с памятью предназначена и клавиша $\langle M+ \rangle$. Она также засылает число из регистра в память, но оно не заменяет уже находящееся там число, а прибавляется к нему. Эта клавиша удобна для суммирования в памяти последовательно вводимых чисел.

Прежде чем выполнять расчет по какой-либо формуле, следует продумать такой порядок расчета, который позволит избежать промежуточных записей на бумаге, поскольку при такой записи вероятны дополнительные ошибки. Также, несмотря на то, что калькуляторы, как правило, автоматически учитывают приоритеты арифметических операций (сначала выполняется умножение и деление, затем сложение и вычитание и т.п.), лучше вручную заставить калькулятор получить промежуточный результат нажатием клавиши $\langle = \rangle$, прежде чем выполнять дальнейший расчет. Проиллюстрируем это примером.

Допустим, необходимо выполнить расчет по формуле

$$W = \frac{0,5 + \sin 5^\circ \cos 10^\circ}{\sqrt{2 + \sin 8^\circ \cos 12^\circ}}.$$

Один из возможных рациональных способов расчета заключается в том, что вначале вычисляется знаменатель, записывается в память, затем вычисляется числитель и делится на значение в памяти. При этом и числитель и знаменатель лучше начать рассчитывать справа налево, то есть начиная с произведения тригонометрических функций. Порядок нажатия клавиш будет такой (знаками $\langle \rangle$ обозначаем введенное число или нажатую клавишу):

$\langle 12 \rangle$, $\langle \cos \rangle$ (на индикаторе появится значение косинуса 12°), $\langle x \rangle$, $\langle 8 \rangle$, $\langle \sin \rangle$ (появится значение синуса), $\langle = \rangle$ (появится произведение косинуса на синус), $\langle + \rangle$, $\langle 2 \rangle$, $\langle = \rangle$ (появится значение подкоренного выражения), $\langle \sqrt{} \rangle$ (появится результат извлечения корня), $\langle x \rightarrow M \rangle$, $\langle 5 \rangle$, $\langle \sin \rangle$, $\langle x \rangle$, $\langle 10 \rangle$, $\langle \cos \rangle$, $\langle = \rangle$, $\langle + \rangle$, $\langle 0,5 \rangle$, $\langle = \rangle$ (появится значение числителя), $\langle : \rangle$, $\langle RM \rangle$, $\langle = \rangle$.

При правильном выполнении операций будет получено значение $W=0,400828695$.

Важное значение имеет точность выполнения расчетов, а правильное сказать – *разрешение* вводимых чисел, определяемое количеством знаков в

числе, например, после запятой. Если этих знаков недостаточно, погрешность вычисления может оказаться очень большой.

Допустим, нужно рассчитать значение угла, синус которого $0,9914$. Это значение составляет примерно $82,5^\circ$. Но если округлить значение синуса до трех знаков после запятой, то есть взять $0,991$, то значение угла будет уже $82,3^\circ$. Казалось бы, разница невелика. Но если вспомнить, что 1° дуги меридиана или экватора составляет примерно 111 км, то разница в угле $0,2^\circ$ эквивалентна погрешности примерно в 22 км!

Отсюда важный вывод: при выполнении большинства расчетов необходимо использовать не менее шести знаков после запятой, а лучше, особенно при расчетах высокой точности, еще больше. Современные калькуляторы позволяют вводить и получать результаты с точностью 8-10 знаков и лучше их использовать все, что легко сделать, если продуманный порядок расчета позволяет избежать записи промежуточных результатов на бумаге. А вот конечный результат уже можно и нужно округлить до столько знаков, сколько требуется, или до той степени точности, которую обеспечивает используемая формула. Напомним, что при округлении последняя цифра 5 округляется в большую сторону, то есть $0,025$ округляется до $0,03$ (если требуется два знака после запятой).

Очевидно, что в геодезических расчетах широко используются угловые величины. Наиболее распространенной единицей измерения углов является *градус* (1°). Градус делится на 60 минут ($60'$), а минута – на 60 секунд ($60''$). Как правило, для ввода угла в калькулятор используется его значение в градусах и десятичных долях градуса, например, $67,768^\circ$, в то время как исходные данные для расчета (например, широта и долгота) выражены в градусах, минутах и секундах. Несмотря на то, что многие калькуляторы имеют функцию автоматического перевода угла из градусно-минутно-секундной формы в десятичную форму (в градусах и его долях), нужно уметь осуществлять такое преобразование вручную.

Преобразование начинается с конца, с правых цифр угла, то есть с секунд. Сначала нужно найти, какую долю минуты составляют секунды (для этого количество секунд делят на 60), затем добавить целое количество минут в заданном угле и результат поделить на 60, чтобы узнать, какую долю градуса составляют получившиеся на предыдущих шагах минуты. Это и будет дробная часть угла в градусах (после запятой). Ну, а целая часть угла в градусах изначально известна, ее нужно просто приписать (на калькуляторе – прибавить). Например, угол $17^\circ 24' 36,19''$ можно преобразовать в десятичные доли градусов нажатием следующих клавиш:

$\langle 36,19 \rangle, \langle : \rangle, \langle 60 \rangle, \langle = \rangle, \langle + \rangle, \langle 24 \rangle, \langle = \rangle, \langle : \rangle, \langle 60 \rangle, \langle = \rangle, \langle + \rangle, \langle 17 \rangle, \langle = \rangle$.

Будет получен результат $17,41005278^\circ$. Возможно, после цифры 8 следуют и другие знаки, но они не вместились в регистр калькулятора и были округлены.

Обратное преобразование осуществляется в следующем порядке. Дробная часть угла в градусах (ее легко получить, вычтя из угла целую

часть) умножается на 60, из результата вычитается целое число минут (его нужно записать) и остаток снова умножается на 60. Это будут секунды и доли секунд. Для нашего примера порядок нажатия клавиш следующий.

$\langle 17,41005278 \rangle, \langle - \rangle, \langle 17 \rangle, \langle = \rangle, \langle x \rangle, \langle 60 \rangle, \langle = \rangle$ (получилось $24,6031668$),
 $\langle - \rangle, \langle 24 \rangle, \langle = \rangle, \langle x \rangle, \langle 60 \rangle, \langle = \rangle$ (получилось $36,190008$).

Таким образом, результат преобразования $17,41005278^\circ = 17^\circ 24' 36,190008''$. Он на восемь миллионных долей секунды отличается от исходного угла ($17^\circ 24' 36,19''$), что объясняется округлением в калькуляторе при преобразовании в градусы и его десятичные доли.

Градус – не единственная единица измерения углов. Мало того, это единица искусственная. Она исторически появилась у древних вавилонян, когда они решили окружность разделить на 360 частей (поскольку год у них состоял из 360 дней).

Самой естественной единицей является *радиан*. По определению радиан – это центральный угол, соответствующий дуге, длина которой равна ее радиусу (рис. 4.5).

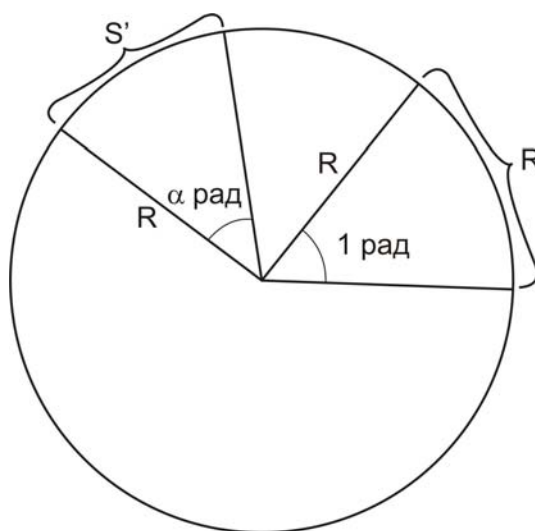


Рис. 4.5. Радиан

При таком определении единицы для измерения углов нет никакого произвола при делении окружности на сколько-то частей и не возникает вопрос - почему именно на столько? Окружность естественным образом делится на столько частей, сколько раз радиус уместится в длине окружности. От величины самого радиуса радиан, конечно, не зависит.

Важным достоинством радиана как единицы измерения углов является возможность с его помощью легко определять длину дуги по известному радиусу и наоборот – определять угол по радиусу и дуге.

Действительно, если, например, угол стягивает дугу вдвое меньшую радиуса, то значит и угол составляет 0,5 радиана. А если угол составляет 1,4

радиана, то он соответствует длине дуги в 1,4 больше радиуса. Отсюда следует

$$\alpha_{рад} = \frac{S}{R}, \quad S = R\alpha_{рад}, \quad (4.8)$$

где S – длина дуги, R – радиус сферы, а $\alpha_{рад}$ – угол, выраженный в радианах.

Из первой из этих формул видно, что угол, измеряемый в радианах – на самом деле величина безразмерная (единицы длины, в которых измеряются S и R , сокращаются), и только для удобства возле величины указывают размерность «рад».

Преобразовать градусы в радианы и обратно нетрудно, если учесть, что полная окружность содержит 360° , что составляет 2π радиан (длина окружности $2\pi R$, то есть в ней укладывается 2π радиусов). Если составить пропорцию, то из нее легко получить следующие соотношения:

$$\alpha_{рад} = \frac{\pi}{180^\circ} \alpha^\circ, \quad \alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \alpha_{рад}.$$

Разумеется, при расчете необходимо использовать не менее 6 знаков после запятой числа π . Их нет необходимости помнить наизусть, поскольку научно-инженерные калькуляторы имеют функцию вызова числа π в любой момент, когда оно потребуется для расчета. Множитель, используемый для преобразования, равен

$$\frac{180^\circ}{\pi} = 57,29577951.$$

При преобразовании в градусы на него следует умножить угол в радианах, а при преобразовании в радианы – разделить.

Калькулятор может принимать и выдавать углы не только в градусах и радианах, но и в так называемых *градах*. Град – это тоже искусственная и малоиспользуемая в настоящее время единица измерения углов, которая получена делением окружности не на 360, а на 400 частей. Таким образом, прямой угол составляет 100 градусов.

Переключение единиц измерения углов на калькуляторе осуществляется нажатием клавиши, на которой, как правило, написано «*DRG*». При этом в верхней части индикатора появляется одно из следующих обозначений:

deg - градусы (*degree*),

rad - радианы,

grad – грады.

Перед любыми расчетами на калькуляторе важно убедиться, что отображаемый символ соответствует желаемым единицам измерения. Наиболее распространена ошибка, когда *grad* принимают за градусы. Разумеется, расчеты при этом будут неверны.

4.4. Ортодромия

Уравнение ортодромии. Ортодромией в навигации называется дуга большого круга на земной сфере. Напомним, что большой круг – это линия, образованная сечением сферы плоскостью, проходящей через центр сферы. Таким образом, термин *ортодромия* применим только к линии на сфере, а говорить об ортодромии, например, на эллипсоиде – неверно.

Значение ортодромии для навигации обусловлено тем, что она является линией, соединяющей две точки по кратчайшему расстоянию по поверхности. Поэтому на сфере она играет такую же роль, какую на плоскости играет прямая линия.

Отрезком ортодромии является линия заданного пути (ЛЗП) участка маршрута между двумя ППМ. Ортодромией является и линия равных пеленгов самолета (ЛРПС), используемая для определения места ВС.

Ортодромия пересекает меридианы в каждой своей точке под разными углами, называемыми *путевыми углами ортодромии*. Это название соответствует случаю, когда под ортодромией подразумевается именно ЛЗП. Но оно используется в картографии во всех ситуациях. На самом же деле, если, например, речь идет о ЛРПС, этот угол будет являться пеленгом (азимутом).

Путевые углы в навигации принято отсчитывать от северного направления меридиана по часовой стрелке.

Выведем уравнение, описывающее ортодромию на сфере.

Пусть β_0 – путевой угол ортодромии в точке E пересечения ее с экватором, λ_0 – долгота этой точки, а C – произвольная точка ортодромии с координатами φ, λ (рис. 4.6). Меридианы, проходящие через полюс P и точки E и C , а также сама ортодромия образуют сферический треугольник. Угол треугольника при вершине P равен разности долгот этих меридианов $(\lambda - \lambda_0)$, сторона EC равна 90° (она идет от экватора до полюса), а сторона PC является дополнением широты точки C до 90° .

Возьмем четыре идущих по порядку элемента этого треугольника: $\beta_0, 90^\circ, \lambda - \lambda_0, 90^\circ - \varphi$. Тогда из сферического треугольника PEC по формуле (4.6) четырех рядом лежащих элементов можно записать:

$$\cos 90^\circ \cos(\lambda - \lambda_0) = \sin 90^\circ \operatorname{ctg}(90^\circ - \varphi) - \sin(\lambda - \lambda_0) \operatorname{ctg} \beta_0.$$

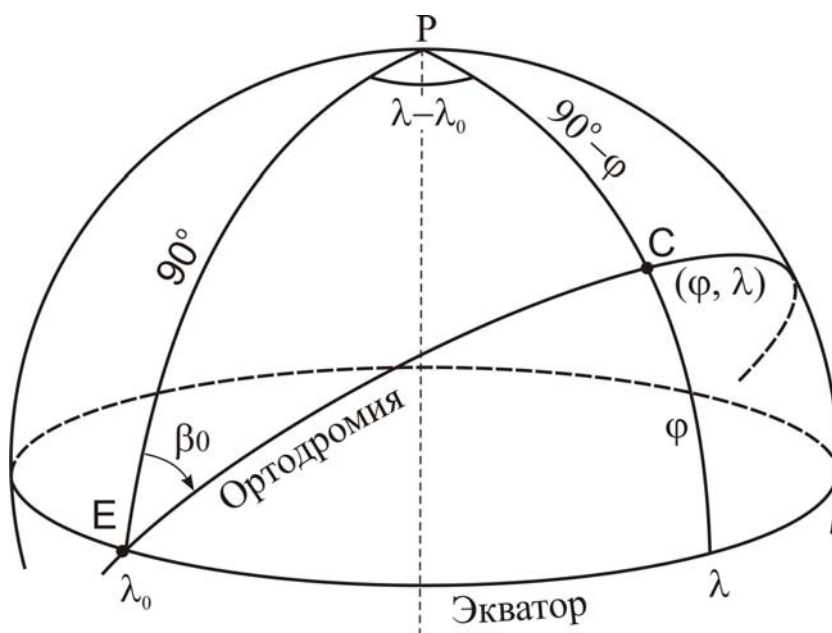


Рис. 4.6. К выводу уравнения ортодромии

Используя известные из тригонометрии формулы приведения и вынеся в левую часть равенства тангенс широты, отсюда можно получить:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{ctg} \beta_0 \sin(\lambda - \lambda_0) \quad (4.9)$$

Полученное выражение является *уравнением ортодромии*. Оно показывает, как связаны друг с другом широта и долгот любой точки ортодромии. Действительно, подставляя в правую часть значение любой долготы λ , можно рассчитать тангенс и затем широту φ точки ортодромии с данной долготой.

В данном уравнении λ_0 и β_0 для данной ортодромии являются константами, определяющими, в каком месте данная ортодромия пересекает экватор и под каким углом к меридиану.

Основное свойство ортодромии. Из этого же сферического треугольника, обозначив через β путевой угол ортодромии в произвольной точке C, по формуле синусов (4.4) можно записать:

$$\frac{\sin(180^\circ - \beta)}{\sin 90^\circ} = \frac{\sin \beta_0}{\sin(90^\circ - \varphi)}$$

откуда

$$\sin \beta \cos \varphi = \sin \beta_0 = \text{const.} \quad (4.10)$$

Данное выражение отражает *основное свойство ортодромии*: для любой точки ортодромии произведение синуса путевого угла на косинус широты есть величина постоянная.

Вертексы ортодромии. Из уравнения ортодромии можно видеть, что поскольку синус меняется в диапазоне от -1 до +1, то минимальное и максимальное значения тангенса широты ортодромии равны

$$\operatorname{tg} \varphi_{\max} = \pm \operatorname{ctg} \beta_0 = \pm \operatorname{tg}(90^\circ - \beta_0),$$

следовательно, минимальная и максимальная широты точек ортодромии равны

$$\varphi_{\max} = \pm(90^\circ - \beta_0).$$

Такие две точки ортодромии, в которых широта (северная и южная) максимальны, называются *точками вертекса V* (рис.4.7). Их координаты

$$\begin{aligned} \varphi_v &= \pm(90^\circ - \beta_0), \\ \lambda_v &= \lambda_0 \pm 90^\circ. \end{aligned}$$

Подставив положительное значение φ_v в выражение (4.10) для основного свойства ортодромии, получим

$$\sin \beta \cos(90^\circ - \beta_0) = \sin \beta_0.$$

Поскольку косинус $(90^\circ - \beta_0)$ равен синусу β_0 , после сокращения получаем $\sin \beta = 1$, и, следовательно, $\beta = 90^\circ$. Если бы подставили отрицательное значение φ_v , то получили бы $\beta = -90^\circ = 270^\circ$.

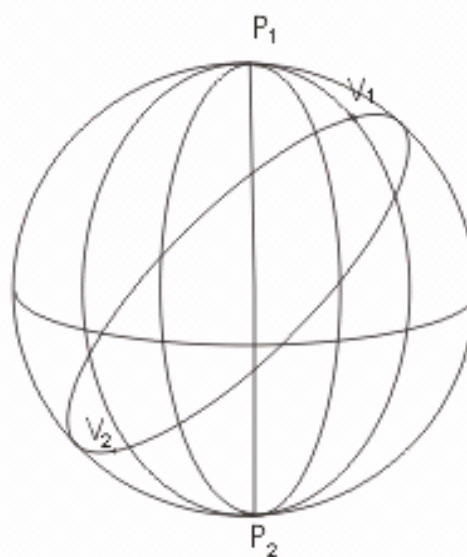


Рис. 4.7. Точки вертекса

Это означает, что в *точках вертекса ортодромии пересекает меридиан под прямым углом*, т.е. путевой угол ортодромии составляет 90° (или 270° , если лететь по этой же ортодромии в противоположную сторону).

В точках вертекса ортодромии ближе всего подходит к полюсам. Любая ортодромия имеет две точки вертекса (кроме экватора, на котором все точки имеют одинаковую нулевую широту).

Точки вертекса расположены симметрично на противоположных концах диаметра ортодромии (он же диаметр сферы). Поэтому их широты отличаются только знаком, а долготы различаются на 180° .

Путевой угол и длина ортодромии. Рассмотрим отрезок ортодромии между точками C_1 и C_2 с координатами соответственно φ_1, λ_1 и φ_2, λ_2 (рис. 4.8).

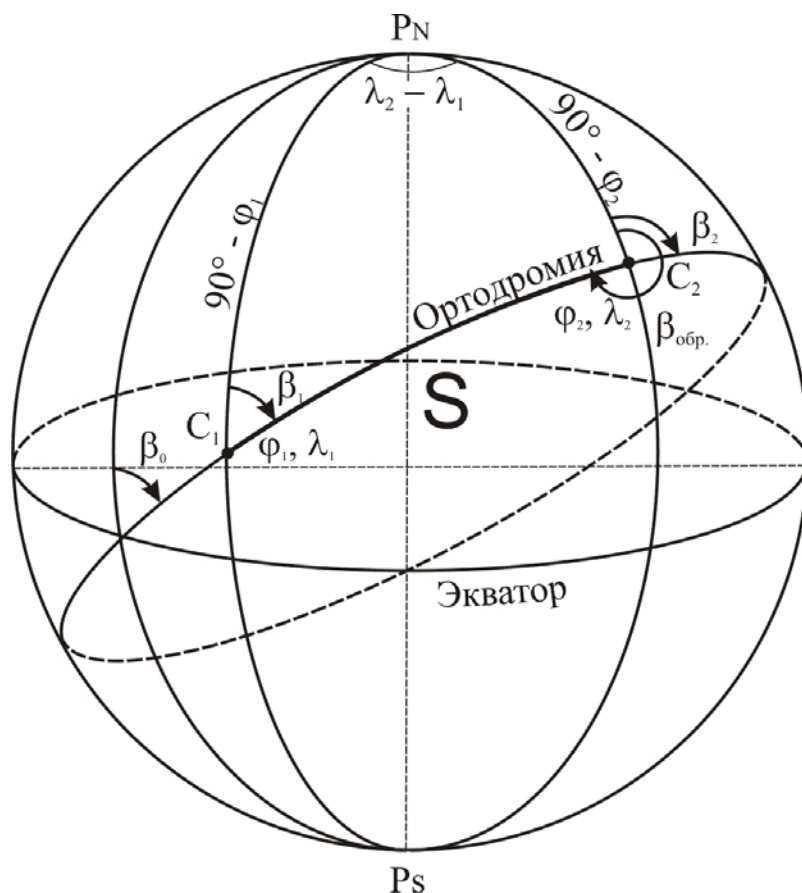


Рис. 4.8. К выводу путевого угла и длины ортодромии

По формуле четырех рядом лежащих элементов можно записать:

$$\cos(90^\circ - \varphi_1) \cos(\lambda_2 - \lambda_1) = \sin(90^\circ - \varphi_1) \operatorname{ctg}(90^\circ - \varphi_2) - \sin(\lambda_2 - \lambda_1) \operatorname{ctg} \beta_1.$$

Учитывая, что по определению косеканса $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$, и используя формулы приведения, получим формулу расчета путевого угла ортодромии в точке φ_1, λ_1 :

$$\operatorname{ctg} \beta_1 = \operatorname{tg} \varphi_2 \cos \varphi_1 \operatorname{cosec}(\lambda_2 - \lambda_1) - \sin \varphi_1 \operatorname{ctg}(\lambda_2 - \lambda_1). \quad (4.11)$$

Здесь индекс «1» в обозначении путевого угла означает, что это путевой угол именно в первой точке с координатами φ_1, λ_1 . Ведь в каждой точке ортодромии путевой угол различный.

При расчете путевого угла по данной формуле на калькуляторе возникнут две небольшие проблемы. Первая заключается в том, что на калькуляторе, как правило, отсутствует функция котангенса и арккотангенса, поэтому после расчета правой части формулы невозможно сразу определить путевой угол β_1 . Решается эта проблема просто. Рассчитав правую часть формулы (обозначим ее значение a), то есть котангенс путевого угла, преобразуем его в тангенс и воспользуемся функцией арктангенса калькулятора.

$$\operatorname{ctg} \beta_1 = a, \quad \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{1}{a}, \quad \beta_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{a}\right).$$

Вторая проблема заключается в том, что тангенс – функция, имеющая период 180° . Одно и то же значение тангенса соответствует, например, и углу 30° , и углу 210° . Калькулятор при использовании функции арктангенса выдает главное значение угла, лежащее в диапазоне от -90° до $+90^\circ$. Но путевой угол ортодромии, разумеется, может быть любым от 0° до 360° . Для того, чтобы найти правильное значение путевого угла, необходимо применить следующее правило в зависимости от знака числа, выданного калькулятором (обозначим это число β_1^*) и направления ортодромии – на восток или на запад.

При $\lambda_2 > \lambda_1$ (полет на восток)	если $\beta_1^* > 0$, то $\beta_1 = \beta_1^*$, если $\beta_1^* < 0$, то $\beta_1 = 180^\circ + \beta_1^*$.
При $\lambda_2 < \lambda_1$ (полет на запад)	если $\beta_1^* > 0$, то $\beta_1 = 180^\circ + \beta_1^*$, если $\beta_1^* < 0$, то $\beta_1 = 360^\circ + \beta_1^*$.

При применении данного правила главным является именно направление ортодромии по кратчайшему расстоянию из первой точки во вторую (на восток или на запад), а не формальное соотношение между долготами точек. Например, если $\lambda_1 = -170^\circ$, а $\lambda_2 = +170^\circ$, то чисто математически $\lambda_2 > \lambda_1$, но лететь из первой точки во вторую короче, конечно, на запад.

Определить обратный путевой угол ортодромии $\beta_{обр}$ для полета по этой же ЛЗП в противоположную сторону, то есть из C_2 и C_1 , можно также формуле (4.11), просто поменяв значения координат – вторую точку принять за первую и наоборот.

Путевой угол β_2 для полета в прямом направлении (из C_1 в C_2), но измеренный от меридиана второй точки

$$\beta_2 = \beta_{\text{обр}} \pm 180^\circ.$$

Найдем расстояние между точками C_1 и C_2 , то есть длину ортодромии. По формуле косинуса стороны можно записать:

$$\cos S = \cos(90^\circ - \varphi_1) \cos(90^\circ - \varphi_2) + \sin(90^\circ - \varphi_1) \sin(90^\circ - \varphi_2) \cos(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Применив формулы приведения тригонометрических функций, получим формулу расчета длины ортодромии между двумя точками:

$$\cos S = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1). \quad (4.12)$$

Расстояние S между двумя точками ортодромии, рассчитанное по этой формуле, получается в угловой мере (в градусах, если на калькуляторе установлено “deg”). Чтобы получить его в линейной мере (в километрах) необходимо перевести S в радианы и умножить на радиус сферы Каврайского.

$$S_{\text{км}} = R_3 S_{\text{рад}}, \quad R_3 = 6372,9 \text{ км}.$$

Если путевой угол ортодромии β_1 уже известен, то длина ортодромии S может быть рассчитана и по другой формуле, полученной на основе теоремы синусов:

$$\frac{\sin S}{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{\sin(90^\circ - \varphi_2)}{\sin \beta_1},$$

откуда

$$\sin S = \frac{\sin(\lambda_2 - \lambda_1) \cos \varphi_2}{\sin \beta_1}. \quad (4.13)$$

Правда, в этом случае возможная погрешность расчета путевого угла приведет к погрешности расчета расстояния.

Координаты вертекса. Решение многих задач, связанных с ортодромией, существенно упрощается, если заранее рассчитать координаты точек вертекса V . Выше уже приведены формулы для определения этих координат, но они включают в себя долготу и путевой угол в точке пересечения ортодромии с экватором. Эти величины, как правило, не известны. Обычно известны только координаты начального и конечного ППМ отрезка ортодромии.

Получим формулы для расчета координат точек V , удобные для применения на практике.

На рис. 4.9 обозначены V – вертекс, C_1 – начальный пункт ортодромии, β_1 – путевой угол ортодромии в этом пункте. Сферический треугольник $P C_1 V$ является прямоугольным, поскольку ортодромия пересекает меридиан в точке вертекса под углом 90° .

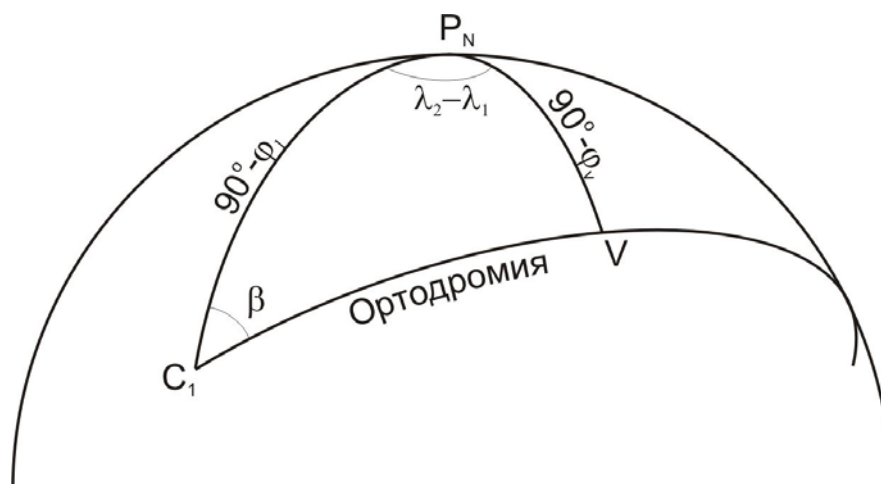


Рис. 4.9. К определению координат вертекса

По правилу Непера для трех рядом лежащих элементов (β_1 , $90^\circ - \varphi_1$, $\lambda_2 - \lambda_1$) можно записать:

$$\cos(90^\circ - \varphi_1) = \operatorname{ctg} \beta_1 \operatorname{ctg}(\lambda_V - \lambda_1),$$

откуда

$$\operatorname{ctg}(\lambda_V - \lambda_1) = \sin \varphi_1 \operatorname{tg} \beta_1. \quad (4.14)$$

Преобразовав для расчета на калькуляторе полученное значение котангенса в значение тангенса, можно найти $(\lambda_V - \lambda_1)$, а затем и λ_V , прибавив долготу λ_1 .

Из этого же треугольника, по правилу Непера для не лежащих рядом трех элементов β_1 , $90^\circ - \varphi_1$, $90^\circ - \varphi_V$, учитывая, что вместо катета PV необходимо использовать его дополнение до 90° , получим

$$\cos[90^\circ - (90^\circ - \varphi_V)] = \sin(90^\circ - \varphi_1) \sin \beta_1,$$

и, после преобразования,

$$\cos \varphi_V = \cos \varphi_1 \sin \beta_1. \quad (4.15)$$

По приведенным формулам (4.14, 4.15) можно определить широты и долготы сразу обеих точек вертекса. Как уже отмечалось, их широты

различаются только знаком, а долготы – на 180° . При использовании этих координат для дальнейших расчетов необходимо следить, чтобы широта и долгота относились к одной и той же точке вертекса. Для этого можно мысленно представить или посмотреть на глобусе как примерно проходит ортодромия, если ее продолжить по всей сфере, и где примерно находятся обе точки вертекса – в северном или южном, западном или восточном полушариях.

Промежуточные точки ортодромии. Во многих случаях для решения навигационных задач достаточно только рассчитать путевой угол и длину ортодромии. Но часто ортодромию необходимо нанести на карту, чтобы узнать, через какие районы и пункты она проходит.

Во всех проекциях (за исключением центральной азимутальной) ортодромия на карте не изображается в виде прямой линии. Правда, аэронавигационные карты специально издаются в таких проекциях, что ортодромия *небольшой* длины (до нескольких сотен километров) выглядит в виде *почти* прямой и на практике ее можно прокладывать по линейке. Отклонение будет незаметным и не превысит, например, толщины карандашной линии.

Но ортодромию большой протяженности нельзя изображать в виде прямой линии. Кроме того, маршрут большой длины может не уместиться на одном листе карты и ортодромию придется прокладывать по частям.

При необходимости построения ортодромии на карте рассчитывают по формулам координаты *промежуточных точек* ортодромии и наносят их на карту. Если точки выбраны на небольшом расстоянии друг от друга, каждый участок ортодромии между ними наносят в виде прямой.

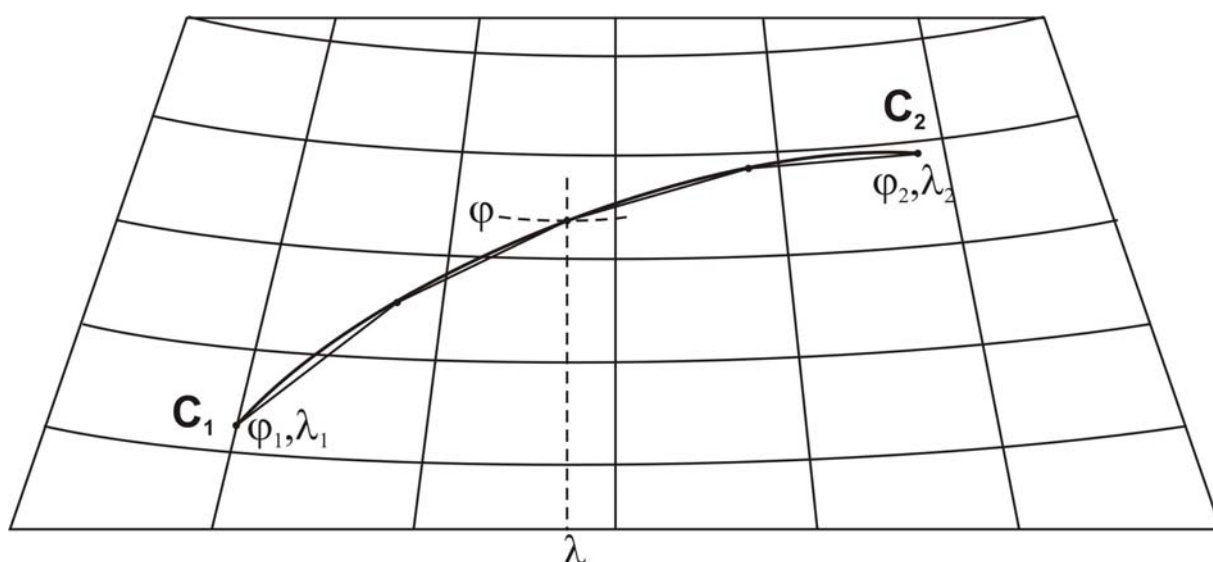


Рис. 4.10. Промежуточные точки ортодромии

Если координаты точки вертекса известны, то координаты φ и λ любой промежуточной точки С можно определить следующим образом из треугольника CPV (рис.4.11).

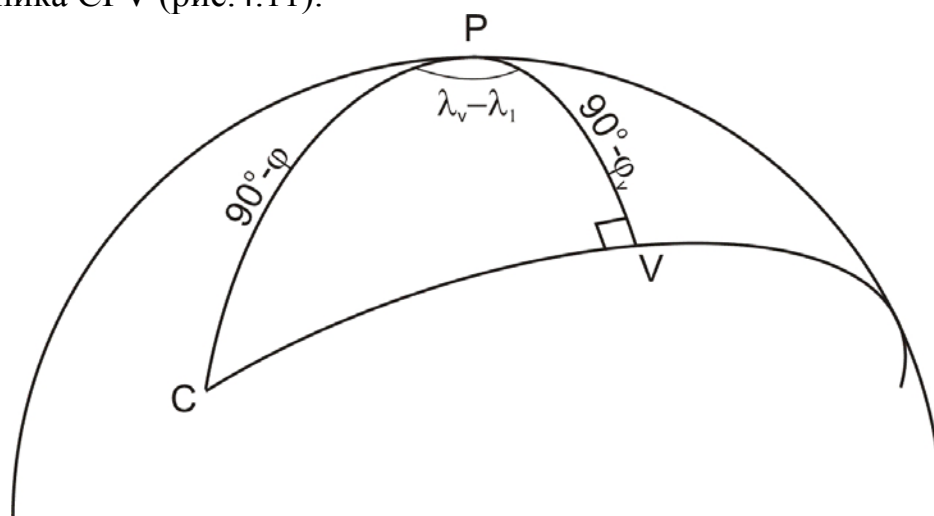


Рис.4.11. К определению координат промежуточных точек ортодромии

По правилу Непера:

$$\cos(\lambda_v - \lambda) = \operatorname{ctg}(90^\circ - \varphi) \operatorname{ctg}[90^\circ - (90^\circ - \varphi_v)]$$

откуда, заменяя котангенсы тангенсами,

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_v \cos(\lambda_v - \lambda). \quad (4.16)$$

По этой формуле, задаваясь любыми долготами λ промежуточных точек, можно рассчитать широты этих точек.

Если ортодромия проходит с севера на юг или с юга на север, то удобнее наоборот задаваться широтами, подставляя их в левую часть формулы, а рассчитывать долготы.

Другой способ расчета промежуточных точек не требует предварительного расчета координат вертекса. Подставляя в правую часть следующей формулы (приводится без вывода) любое значение долготы промежуточной точки, можно рассчитать ее широту

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= A_2 \sin(\lambda - \lambda_1) + A_1 \sin(\lambda_2 - \lambda), \\ \text{где } A_1 &= \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{cosec}(\lambda_2 - \lambda_1), \\ A_2 &= \operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{cosec}(\lambda_2 - \lambda_1). \end{aligned} \quad (4.17)$$

A_1 и A_2 - являются константами для данной ортодромии, их нужно рассчитать только один раз.

Поскольку целью расчета промежуточных точек является нанесение их на карту, целесообразно задаваться «круглыми» значениями долгот (или широт), то есть такими, для которых на карте нанесены меридианы (параллели). Это существенно облегчит нанесение точек.

Необходимо помнить, что рассчитанные координаты промежуточных точек являются сферическими. Но на карте нанесена сетка геодезических координат. Поэтому перед нанесением точек на карту сферические широты нужно преобразовать в геодезические.

$$B = \varphi + 8,6' \sin 2\varphi.$$

4.5. Угол схождения меридианов на сфере

Угол схождения меридианов имеет очень важное значение в навигации. Он используется при расчете и прокладке линий положения, при преобразовании направлений (курсов, путевых углов, пеленгов) из одной системы отсчета в другую. Он является составной частью азимутальной поправки, используемой при переходе от истинного меридиана к опорному.

Название этой величины немного сбивает с толку. Можно подумать, что это действительно угол, под которым сходятся меридианы, но это не так. Меридианы, конечно, и в самом деле сходятся (в точках полюсов), но не под углом схождения меридианов, а под углом, равным разности их долгот.

Угол схождения меридианов в двух точках сферы (δ_{cx}) - это разность путевых углов ортодромии, проходящей через эти точки.

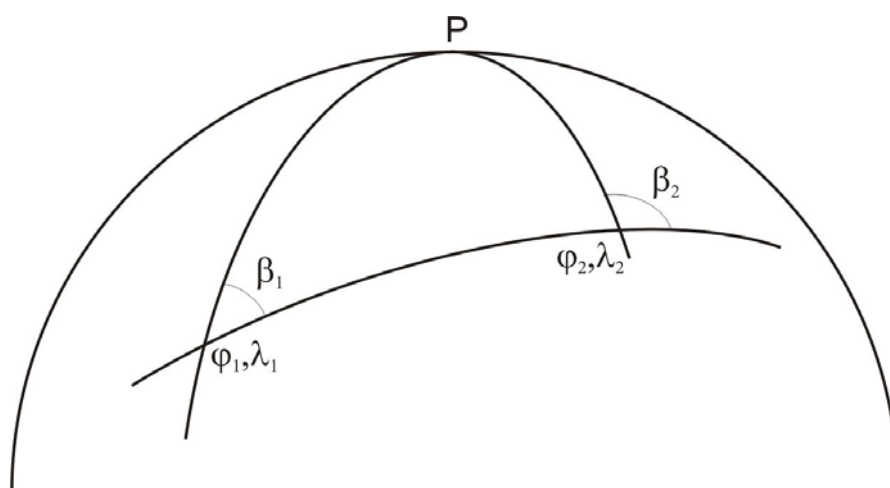


Рис. 4.12. Угол схождения меридианов

Ортодромия пересекает меридианы под различными углами. Если в первой точке с координатами φ_1, λ_1 путевой угол β_1 , а во второй точке с координатами φ_2, λ_2 путевой угол β_2 , то по определению

$$\delta_{cx} = \beta_2 - \beta_1. \quad (4.18)$$

Конечно, найти численное значение δ_{cx} можно и непосредственно по этой формуле. Но для этого нужно рассчитать сами путевые углы по формулам, выведенным выше. Если прямой β_1 и обратный $\beta_{обp}$ путевые углы уже известны, то найти β_2 достаточно просто:

$$\beta_2 = \beta_{обp} \pm 180^\circ.$$

Можно использовать для нахождения β_2 и основное свойство ортодромии, в соответствии с которым

$$\sin \beta_1 \cos \varphi_1 = \sin \beta_2 \cos \varphi_2,$$

откуда

$$\sin \beta_2 = \sin \beta_1 \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2}.$$

Но для решения многих навигационных задач сами путевые углы не нужны, а интересует только угол схождения меридианов.

Если известны только координаты обеих точек, то значение угла схождения меридианов может быть рассчитано по формуле (приводится без вывода):

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_{cx}}{2} = \frac{\sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}{\cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}} \operatorname{tg} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}. \quad (4.19)$$

Эта точная, хотя и несколько громоздкая, формула может быть использована при любом расстоянии между точками.

При сравнительно небольших расстояниях ее можно упростить. Если разности широт и долгот точек невелики, то углы δ_{cx} и $(\lambda_2 - \lambda_1)$ малы и их тангенсы можно заменить значениями самих углов (в радианах), а косинус полуразности широт можно принять равным единице. Тогда легко получить

$$\delta_{cx} \approx (\lambda_2 - \lambda_1) \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = (\lambda_2 - \lambda_1) \sin \varphi_{cp}, \quad (4.20)$$

где φ_{cp} – средняя широта данных двух точек.

Несмотря на то, что эта формула является приближенной, она дает вполне точные для практики результаты на довольно больших расстояниях и поэтому широко применяется в навигации. Для примера приведем

результаты расчета δ_{cx} для трех ортодромий по приближенной (4.20) и точной (4.19) формулам с точностью до минуты.

Санкт-Петербург-Москва: точно $6^{\circ}11'$, приближенно $6^{\circ}11'$.

Санкт-Петербург-Новосибирск: точно $45^{\circ}16'$, приближенно $44^{\circ}20'$.

Санкт-Петербург-Владивосток: точно $88^{\circ}15'$, приближенно $79^{\circ}32'$.

Таким образом, даже на расстояниях, измеряемых двумя-тремя тысячами километров (Новосибирск), погрешность не превышает 1° . Если же речь идет о сотнях километров (в средних широтах), то приближенная формула практически точна. В полярных районах, где меридианы расположены «густо», даже при небольшом расстоянии между точками разность их долгот и, следовательно, угол схождения меридианов, могут быть велики.

Угол схождения меридианов имеет знак. В северном полушарии (когда широты положительны), если вторая точка находится восточнее первой, δ_{cx} положителен, а если западнее – отрицателен. В южном полушарии – наоборот.

Как следует из формулы (4.19), δ_{cx} равен нулю либо когда разность долгот равна нулю (обе точки на одном меридиане), либо средняя широта равна нулю (обе точки на экваторе или расположены относительно него симметрично).

4.6. Преобразование сферических координат в ортодромические

Для применения некоторых навигационных систем и пилотажно-навигационных комплексов необходимо знать частно-ортодромические координаты радиомаяков z_p и s_p в системе координат, связанной с текущим участком маршрута. Если известны сферические координаты радиомаяка φ_p и λ_p , а также сферические координаты начального и конечного ППМ участка (φ_1, λ_1 и φ_2, λ_2), то частно-ортодромические координаты радиомаяка могут быть рассчитаны по формулам сферической тригонометрии.

Как уже отмечалось, ортодромическая система координат является по сути косою сферической системой координат, отличающейся от нормальной сферической (в которой и заданы координаты φ и λ радиомаяка и ППМ) только смещенным расположением полюсов и условного экватора. Поэтому задача определения частно-ортодромических координат с математической стороны является задачей пересчета координат из одной сферической системы в другую.

Существуют формулы, позволяющие выполнить такой пересчет в общем случае, то есть при любом расположении участка маршрута и радиомаяка, даже если они находятся в противоположных полушариях Земли.

На практике радиомаяк находится максимум на расстоянии нескольких сотен километров от ЛЗП (иначе его невозможно использовать в

полете). Для этого случая можно использовать не менее точный, но более наглядный способ расчета.

Пусть C_1 и C_2 соответственно начальный и конечный ППМ участка маршрута (рис. 4.13). Начало частно-ортодромической системы координат установим в начальном ППМ участка C_1 , ось S направим по ЛЗП, а ось Z вправо. Пусть T – расположенная на ЛЗП точка траверза радиомаяка P . Точки C_1 , T , P образуют сферический треугольник, сторонами которого являются три ортодромии.

Расстояние $C_1 T$ – это искомая координата радиомаяка s_p , TP – координата радиомаяка z_p , $C_1 P$ – это удаление D_p радиомаяка от ППМ

Этот треугольник прямоугольный, прямой угол при вершине T .

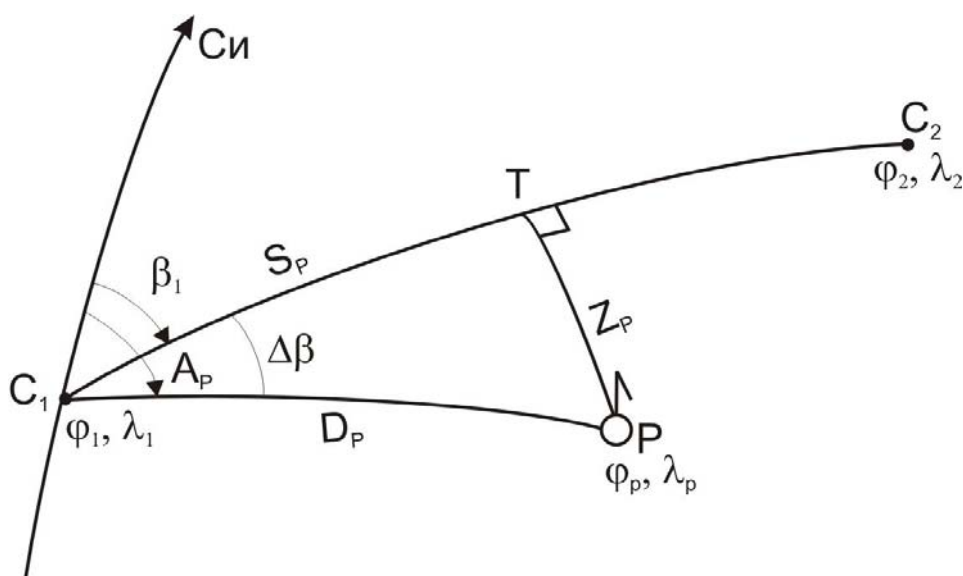


Рис. 4.13. К определению частно-ортодромических координат радиомаяка,

Порядок расчета координат z_p и s_p следующий:

- 1) По координатам ППМ φ_1, λ_1 и φ_2, λ_2 рассчитать путевой угол β_1 участка маршрута (по полученной выше формуле путевого угла ортодромии).
- 2) Рассчитать азимут A_p и удаление D_p радиомаяка от начального ППМ. Расчет выполняется по известным формулам путевого угла и длины ортодромии (в качестве первой точки берется ППМ, а второй – радиомаяк).
- 3) Рассчитать разность азимута радиомаяка и путевого угла участка $\Delta\beta = A_p - \beta_1$. Очевидно, что знак $\Delta\beta$ соответствует стороне расположения радиомаяка от ЛЗП (плюс – справа, минус слева). Такой же получится и знак z_p .
- 4) По правилу Непера для трех рядом лежащих элементов (s_p , $\Delta\beta$, D_p) рассматриваемого треугольника можно записать

$$\cos \Delta\beta = \operatorname{ctg} D \operatorname{ctg}(90^\circ - s_p),$$

откуда, после преобразования, получаем формулу расчета s_p :

$$\operatorname{tg} s_p = \cos \Delta \beta \operatorname{tg} D_p. \quad (4.21)$$

5) По правилу Непера для элементов, не лежащих рядом ($\Delta \beta$, D_p , z_p), получим

$$\cos(90^\circ - z_p) = \sin \Delta \beta \sin D_p,$$

откуда можно найти z_p как

$$\sin z_p = \sin \Delta \beta \sin D_p. \quad (4.22)$$

Значения z_p и s_p по данным формулам будут получены в угловой мере. Для получения этих координат в линейной мере (километрах) их значения в радианах необходимо умножить на радиус сферы Каврайского.

4.7. Локсодромия

Локсодромия – это кривая на сфере, пересекающая меридианы под постоянным углом, то есть такая линия, в каждой точке которой один и тот же путевой угол $\beta = \text{const}$.

Исторически локсодромия появилась в навигации в связи с использованием магнитных компасов. Действительно, если самолет летит с постоянным курсом относительно текущего пролетаемого меридиана, то при отсутствии ветра и нулевом магнитном склонении он будет лететь по локсодромии.

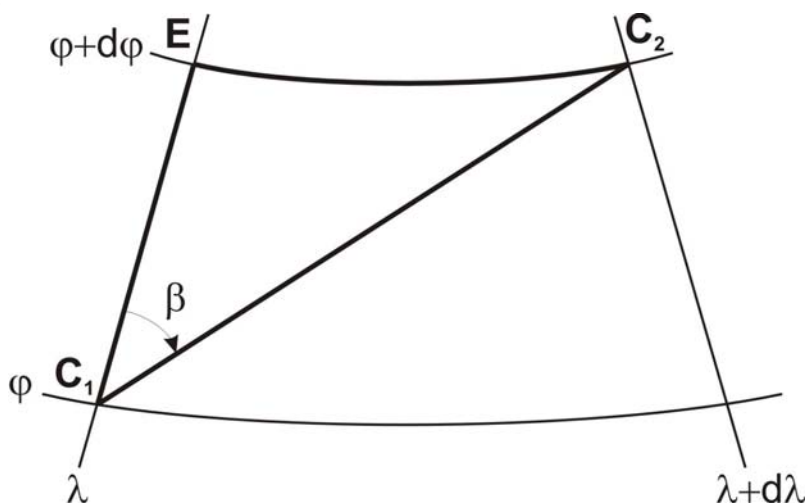


Рис. 4.14. К выводу уравнения локсодромии

Пусть C_1C_2 - бесконечно малый отрезок локсодромии, пересекающей меридианы под углом β (рис. 4.14). Бесконечно малый треугольник EC_1C_2 можно рассматривать как плоский. Тогда

$$C_1E = R d\varphi,$$

$$EC_2 = r d\lambda = R \cos \varphi d\lambda,$$

где R – радиус земной сферы, r – радиус параллели с широтой φ .

Тогда

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{EC_2}{EC_1} = \frac{R \cos \varphi d\lambda}{R d\varphi},$$

откуда

$$d\lambda = \operatorname{tg} \beta \frac{d\varphi}{\cos \varphi}. \quad (4.23)$$

Проинтегрируем обе части выражения с учетом того, что $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{const}$ для конкретной локсодромии. При этом используем значение табличного интеграла:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right).$$

Получим

$$\lambda = \operatorname{tg} \beta \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + k,$$

где k – постоянная интегрирования.

Чтобы выяснить физический смысл k , подставим в полученную формулу $\varphi = 0$ и получим $\lambda = k$. Следовательно, k – это долгота точки пересечения локсодромии с экватором (обозначим ее λ_0).

Таким образом, уравнение локсодромии имеет вид

$$\lambda - \lambda_0 = \operatorname{tg} \beta \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right). \quad (4.24)$$

В этом уравнении β и λ_0 – постоянные для данной локсодромии величины. Подставляя в правую часть уравнения любую широту φ , можно найти соответствующую ей долготу λ точки на локсодромии.

Анализ данного уравнения показывает, что по форме локсодромия в общем случае представляет собой логарифмическую спираль, асимптотически приближающуюся к полюсам и никогда их не достигающую. Лишь в частных случаях локсодромия имеет вид окружности – это параллели

и экватор (пересекают меридианы под 90°), меридианы («пересекают» сами себя под нулевым углом).

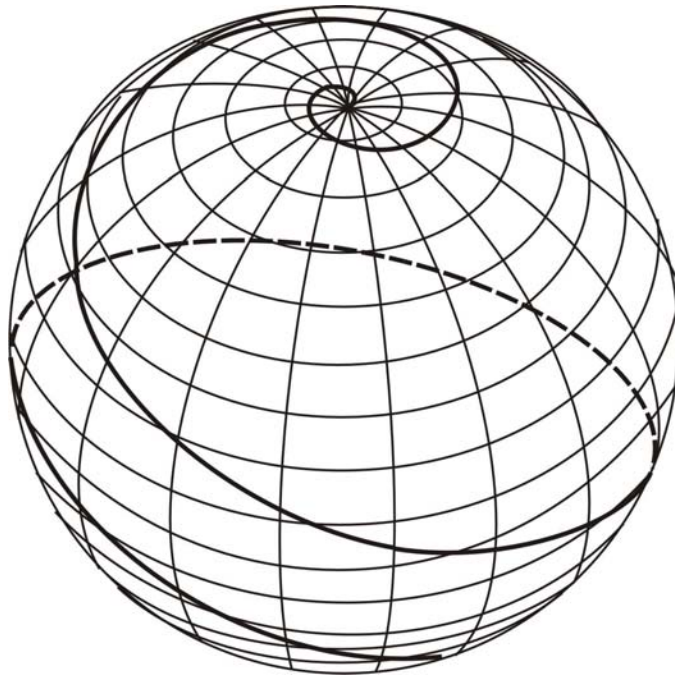


Рис. 4.15. Общий вид локсодромии на сфере

Проинтегрируем (4.23) – правую часть от φ_1 до φ_2 , а левую от λ_1 до λ_2 , получим:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \operatorname{tg} \beta \left[\ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi_2}{2} \right) - \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2} \right) \right],$$

откуда можно выразить тангенс путевого угла

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)_{\text{рад}}}{\left[\ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi_2}{2} \right) - \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2} \right) \right]}. \quad (4.25)$$

По этой формуле можно рассчитать путевой угол локсодромии.

Найдем длину локсодромии. Из бесконечно малого треугольника EC_1C_2 , который можно считать плоским:

$$EC_1 = C_1C_2 \cos \beta.$$

Здесь $EC = R d\varphi$ – длина бесконечно малого отрезка меридиана, а $C_1C_2 = R dS$ – длина бесконечно малого отрезка локсодромии (здесь φ и S измеряются в угловой мере). Тогда

$$Rd\varphi = R dS \cos \beta,$$

откуда

$$dS = \frac{d\varphi}{\cos \beta}.$$

Переходя от бесконечно малых отрезков к конечным величинам, после интегрирования получим:

$$S_{\text{локс}} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\cos \beta}. \quad (4.26)$$

По этой формуле можно рассчитать длину локсодромии между двумя точками с известными широтами при заданном путевом угле. Длина получается в тех же единицах измерения, в каких в формулу были подставлены широты (градусы, радианы). Ее можно преобразовать в линейные единицы (километры) аналогично тому, как это было рассмотрено для ортодромии (преобразовать в радианы и умножить на радиус сферы).

При путевых углах локсодромии, близких к $\beta = 90^\circ$ или $\beta = 270^\circ$ числитель и знаменатель приведенной формулы очень малы, поэтому она может давать большие погрешности при практическом расчете на калькуляторе из-за округления последних разрядов чисел. В таких случаях лучше воспользоваться другой формулой, получаемой из того же треугольника:

$$\begin{aligned} EC_2 &= C_1 C_2 \sin \beta, \\ R \cos \varphi d\lambda &= R dS \sin \beta, \end{aligned}$$

$$dS = d\lambda \frac{\cos \varphi}{\sin \beta}.$$

Так как при таких путевых углах локсодромия проходит вблизи параллели и $\varphi_1 \approx \varphi_2$, можно принять, что

$$\cos \varphi = \cos \varphi_{cp} = \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

Тогда после интегрирования получим:

$$S_{\text{локс}} = (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\cos \varphi_{cp}}{\sin \beta}. \quad (4.27)$$

Эта формула в общем случае является приближенной, поскольку вместо фактических широт точек используется средняя широта, но она тем точнее, чем ближе локсодромия к параллели.

В практике навигации, когда не требуется высокая точность определения путевого угла локсодромии, его определяют графически путем измерения на карте.

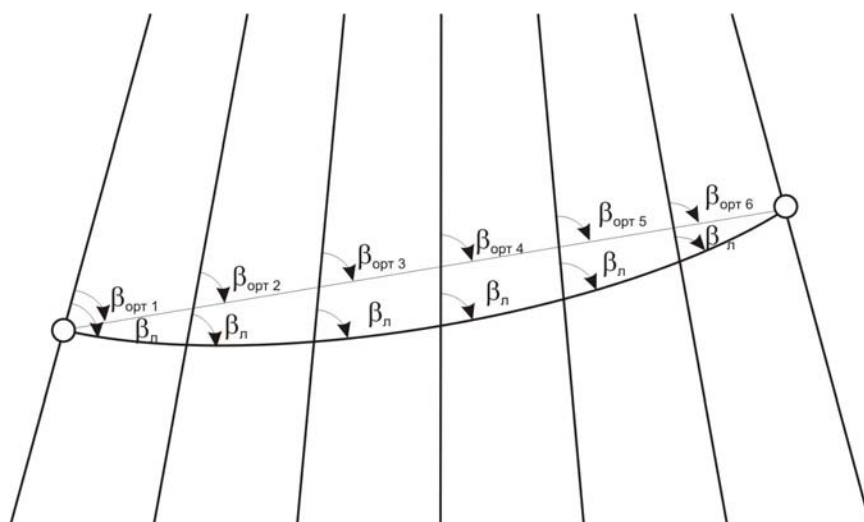


Рис. 4.16. Графическое определение локсодромического путевого угла

Поскольку локсодромия на полетных картах не нанесена (нанесены только участки ЛЗП – ортодромии), транспортиром измеряют путевой угол ортодромии относительно среднего меридиана участка. Он и будет совпадать с путевым углом локсодромии, поскольку посередине участка маршрута ортодромия и локсодромия примерно параллельны.

4.8. Сравнение локсодромии и ортодромии

Поскольку ортодромия – линия кратчайшего расстояния между двумя точками на сфере, то локсодромия всегда длиннее ортодромии (конечно, если они не совпадают).

Наибольшая разность длин ΔS имеет место, когда локсодромия совпадает с параллелью.

Максимальное относительное удлинение $\left(\frac{\Delta S}{S_{opt}} \right)$ имеет место вблизи полюса и достигает 57%.

В экваториальных и средних широтах при не очень больших расстояниях между точками (мала разность долгот) удлинение не очень велико и не играет практической роли. Например, при средней широте $\varphi = 54^\circ 30'$ и разности долгот $\Delta \lambda = 30^\circ$ (это соответствует расстоянию примерно $S = 2000$ км) удлинение составит всего $\Delta S = 15$ км.

Локсодромия уклоняется от ортодромии в сторону экватора (рис. 4.17), то есть в северном полушарии к югу, а в южном – к северу.

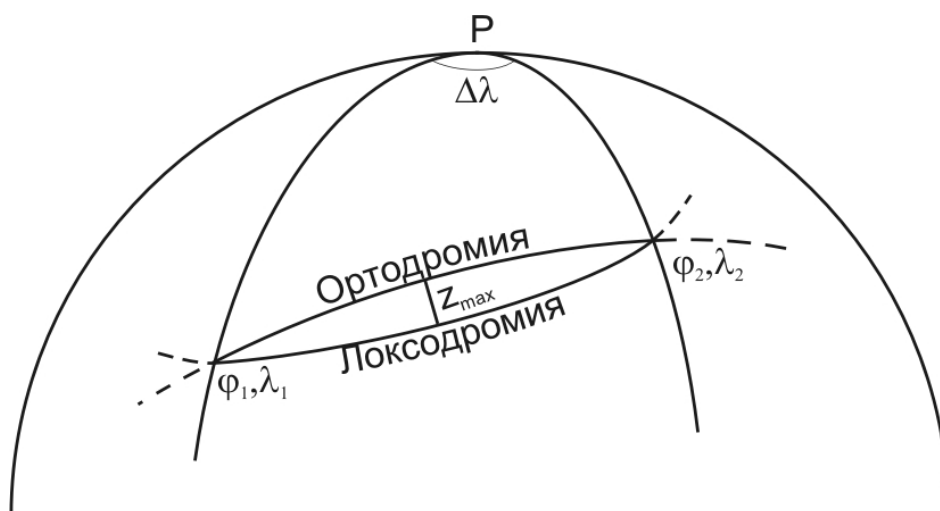


Рис. 4.17. Уклонение локсодромии от ортодромии

Максимальное боковое уклонение Z_{max} имеет место примерно посередине локсодромии и может быть оценено (в километрах) по приближенной формуле

$$Z_{max} \approx \frac{S \delta_{cx}^{\circ}}{458},$$

где δ_{cx} – угол схождения меридианов начала и конца локсодромии (в градусах).

Рассмотрим два примера расчета по этой формуле.

1) $\varphi_1 = \varphi_2 = 60^{\circ}$, $\Delta\lambda = 5^{\circ}$, $S = 275$ км, $\delta_{cx} = 4,3^{\circ}$. По формуле получаем $Z_{max} = 2,6$ км, что соответствует нахождению ВС, выполняющего полет по локсодромии, в пределах ширины трассы.

2) $\varphi_1 = \varphi_2 = 60^{\circ}$, $\Delta\lambda = 20^{\circ}$, $S = 1100$ км, $\delta_{cx} \approx 17,3^{\circ}$. В этом случае $Z_{max} = 41$ км и полет по локсодромической ЛЗП, конечно, недопустим.

Если на ВС используются локсодромические курсовые приборы, например, магнитный компас, и полет может выполняться только по локсодромии, то есть с заведомым отклонением от ЛЗП, для уменьшения отклонения на участках маршрута большой протяженности их можно разбить на две-три части и для каждой из них определить локсодромический путевой угол.

4.9. Линии положения на сфере

Понятие об обобщенном методе линий положения. Практически любой способ определения места самолета по приборам можно представить как частный случай применения обобщенного метода линий положения. Теоретическую основу этого метода, позволяющую унифицировать разные способы местоопределения и оценку их точности, заложил В.В.Каврайский.

Одним из ключевых понятий обобщенного метода линий положения является понятие навигационного параметра. В рамках данного метода *навигационным параметром* называется физическая или геометрическая величина, значение которой как бы «закреплено» за каждой точкой пространства, то есть величина, являющаяся функцией координат точки.

Одно и то же значение навигационного параметра имеет место не в одной, а в бесконечном множестве точек. Как правило, в пространстве все точки с одинаковым значением параметра располагаются на какой-то поверхности, а на земной сфере – на какой-то линии.

Линией положения (ЛП) называется геометрическое место точек на земной поверхности с одинаковым значением навигационного параметра. Каждому виду навигационного параметра соответствует линия положения определенной формы. Данный параграф посвящен рассмотрению вопроса о форме различных линий положения на поверхности Земли, если ее принять за сферу.

Если знать значение навигационного параметра и форму ЛП, ее можно проложить на карте в полете или заранее нанести семейство ЛП, соответствующих различным значениям навигационного параметра.

Если в полете с помощью навигационных приборов измерено значение навигационного параметра в точке местоположения ВС, то очевидно, что эта точка находится где-то на ЛП, соответствующей данному значению параметра. Аналогично, измерив другой навигационный параметр и определив соответствующую ему вторую ЛП, можно определить и место самолета. Это будет точка пересечения двух ЛП.

Если известны уравнения ЛП на сфере, можно не прокладывать эти линии графически на карте, а аналитическим путем (по формулам) рассчитать координаты точки пересечения ЛП, то есть широту и долготу места самолета. Однако, поскольку эти уравнения на сфере достаточно громоздки, на практике аналитическое определение координат можно реализовать только при наличии на борту цифрового навигационного вычислителя (компьютера).

Рассмотрим наиболее часто используемые в навигации навигационные параметры и соответствующие им линии положения.

Линия равных пеленгов самолета (ЛРПС). Это линия на земной сфере, в каждой точке которой один и тот же пеленг самолета.

Пеленг самолета – это угол в горизонтальной плоскости, заключенный между северным направлением меридиана, проходящего через радиомаяк, и направлением на самолет (рис.4.18).

Очевидно, что под «направлением на самолет» понимается направление по линии кратчайшего расстояния. Такой линией на плоскости является прямая, а на сфере – дуга большого круга (ортодромия). Очевидно, что в каждой точке этой линии будет одинаковый пеленг самолета (рис. 4.18).

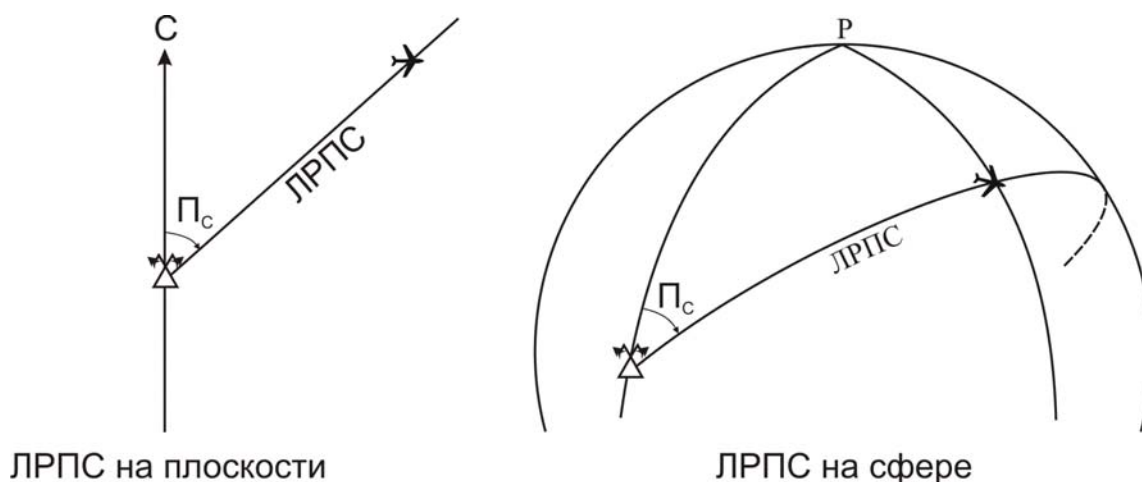


Рис. 4.18. Линия равных пеленгов самолета на плоскости и на сфере

Таким образом, *ЛРПС на сфере имеет форму ортодромии*, то есть окружности с радиусом, равным радиусу сферы.

Уравнение ЛРПС на сфере легко получить из уравнения (4.11) путевого угла ортодромии, просто заменив обозначения. Подставив вместо путевого угла β пеленг самолета $П_c$, вместо широты φ_1 и долготы λ_1 первой точки – координаты радиомаяка φ_p и λ_p , а вместо координат второй точки – широту φ и долготу λ произвольной точки на ортодромии, получим

$$\operatorname{ctg} П_c = \operatorname{tg} \varphi \cos \varphi_p \cos ec(\lambda - \lambda_p) - \sin \varphi_p \operatorname{ctg}(\lambda - \lambda_p).$$

Это и будет уравнение ЛРПС (ортодромии) на сфере. В нем $П_c$, φ_p и λ_p являются постоянными для данной ЛРПС величинами. Переменными являются φ и λ произвольной точки. Если из этого выражения выразить широту φ , перенеся ее в левую часть и оставив в правой λ , можно получить уравнение и в явном виде, то есть определить зависимость широты от долготы для точек, находящихся на ЛРПС.

Разумеется, все выводы, которые были сделаны выше применительно к ортодромии, в полной мере относятся и к ЛРПС – это одна и та же линия.

Линия равных пеленгов радиостанции (ЛРПР). Пеленг радиостанции – это угол, заключенный между меридианом точки (самолета) и направлением на радиостанцию. ЛРПР – это линия на сфере, во всех точках которой этот угол одинаков. На первый взгляд это должна быть такая же линия, что и ЛРПС. Казалось бы, что пеленг самолета – это «туда», а пеленг радиостанции «обратно», то есть это противоположные направления одной и той же линии.

На самом деле это не так, поскольку пеленг самолета измеряется от одного и того же меридиана (радиостанции), независимо от того, где находится текущая точка (самолет), а вот пеленг радиостанции каждый раз измеряется от нового меридиана – меридиана текущей точки (самолета). Поскольку меридианы не параллельны, это принципиально меняет всю

картину. ЛРПР имеет сложную форму, называемую *пространственной лемнискатой*.

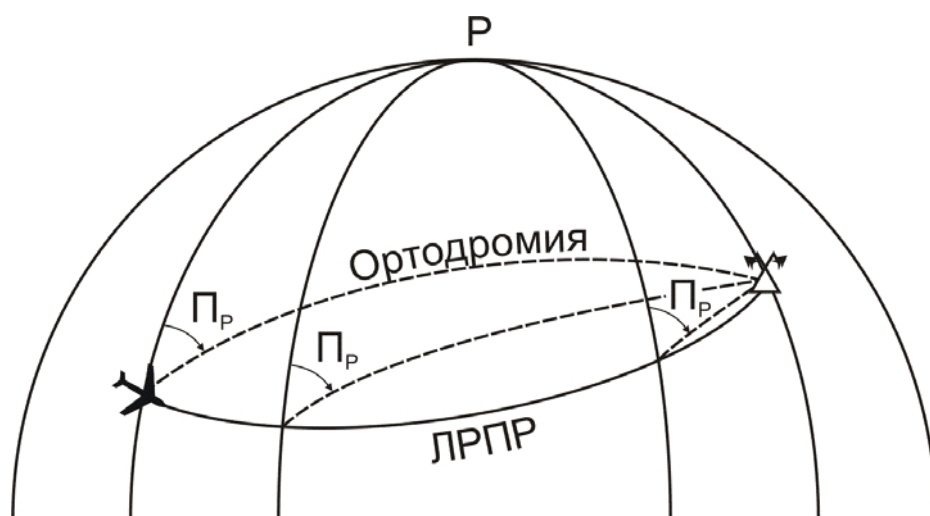


Рис. 4.19. Линия равных пеленгов радиостанции

На рис. 4.19 ЛРПР изображена сплошной линией, а ортодромические направления на радиостанцию – пунктиром. ЛРПР – это такая линия, что в каждой ее точке угол между меридианом этой точки и направлением по ортодромии (пунктир) на радиостанцию одинаков.

Уравнение ЛРПР также можно получить из формулы путевого угла ортодромии, только теперь вместо координат второй точки нужно подставить координаты радиомаяка, а вместо координат первой точки – текущие φ и λ .

$$\operatorname{ctg} P_p = \cos \varphi \operatorname{tg} \varphi_p \operatorname{cosec}(\lambda_p - \lambda) - \sin \varphi \operatorname{ctg}(\lambda_p - \lambda)$$

Каждому значению P_p соответствует своя ЛРПР, они образуют семейство этих линий положения. Если их продолжить по всей сфере, отвлекаясь от того, что в реальности радиомаяки имеют ограниченную дальность действия, то получится картина, показанная на рис. 4.20. На этом рисунке радиомаяк расположен на широте $\varphi_p = 20^\circ$ с.ш.

Семейство ЛРПР обладает следующими свойствами.

- 1) Все ЛРПР проходят через четыре точки: радиомаяк, точку диаметрально ему противоположную на земном шаре, два географических полюса.
- 2) Экватор пересекают только те ЛРПР, для которых $P_p < 90^\circ - \varphi_p$.
- 3) Каждая ЛРПР состоит из двух ветвей, располагающихся по-разному в зависимости от соотношения P_p и $(90^\circ - \varphi_p)$.
- 4) Семейство ЛРПР симметрично относительно меридиана радиомаяка.

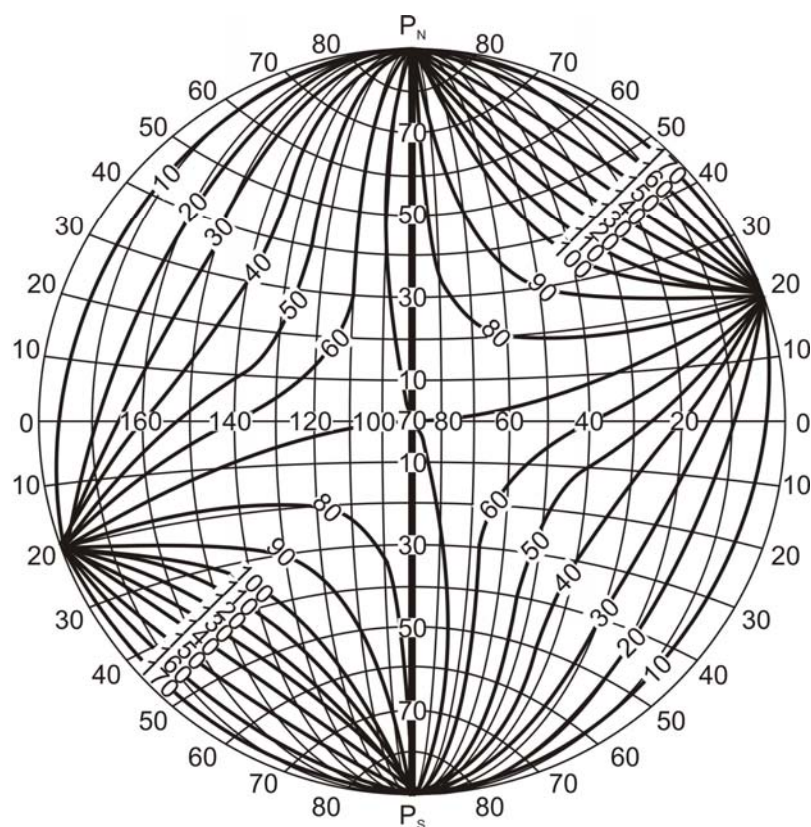


Рис. 4.20. Семейство ЛРПР на сфере

На практике угломерные радиомаяки имеют ограниченную дальность действия (обычно не более 400 км). На малых удалениях до радиомаяка (несколько десятков километров) ЛРПР близка к ортодромии (ЛРПС), а при больших удалениях может существенно от нее отклоняться. Это означает, что выполняя полет на радиомаяк путем выдерживания постоянного пеленга радиостанции Π_p , самолет уклонится от ортодромической ЛЗП (рис. 4.21).

Максимальная величина уклонения Z_c в километрах может быть оценена по приближенной формуле

$$Z_c \approx 0,0023 \frac{S^2 \sin \Pi_p}{90^\circ - \varphi_p},$$

где S – начальное расстояние от радиомаяка (в километрах), Π_p и φ_p – соответственно выдерживаемый пеленг радиостанции и ее широта (в градусах).

Из формулы видно, что уклонение пропорционально синусу пеленга, и, следовательно, является максимальным при $\Pi_p = 90^\circ$ и 270° , а при полете на север или юг будет незначительным. Из знаменателя следует, что в полярных районах уклонения при прочих равных условиях больше. Существенно зависит уклонение от начального расстояния S – пропорционально его квадрату. Например, при широте радиомаяка 60° и выдерживании пеленга 90° при начальном удалении $S=150$ км уклонение составит примерно 1,7 км,

а при $S=300$ км оно будет уже около 7 км, то есть превысит половину ширины трассы.

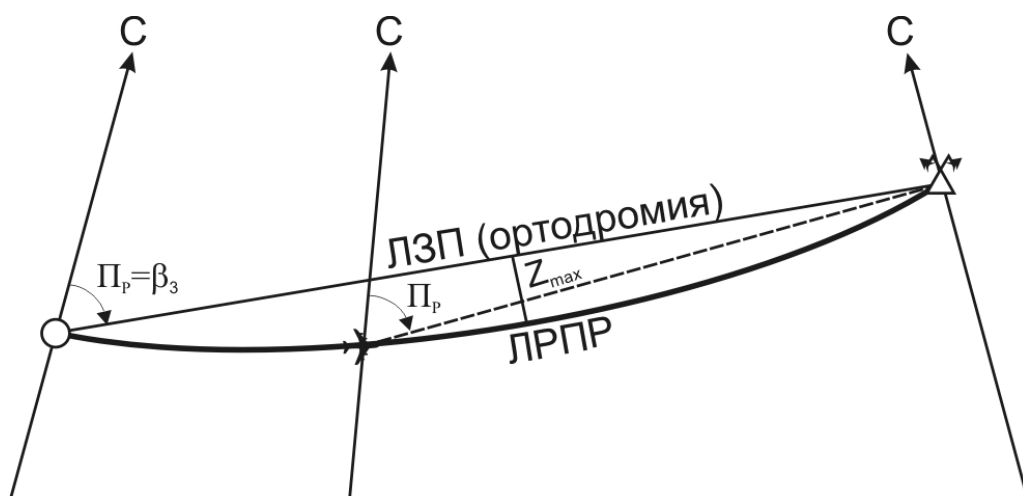


Рис. 4.21. Уклонение от ЛЗП при полете по ЛРПР

Линия равных расстояний (ЛРР). Эта ЛП соответствует навигационному параметру «удаление самолета от радиомаяка», то есть горизонтальной дальности D . ЛРР – геометрическое место точек на земной сфере, равноудаленных от некоторой точки (радиомаяка).

Нетрудно представить, что и на сфере, и на плоскости ЛРР имеет форму окружности (рис. 4.22). Уравнение ЛРР может быть получено из формулы длины ортодромии (4.12).

Выразив расстояние D через координаты радиомаяка и произвольной точки на ЛРР (рис. 4.22), получим

$$\cos D = \sin \varphi \sin \varphi_p + \cos \varphi \cos \varphi_p \cos(\lambda - \lambda_p).$$

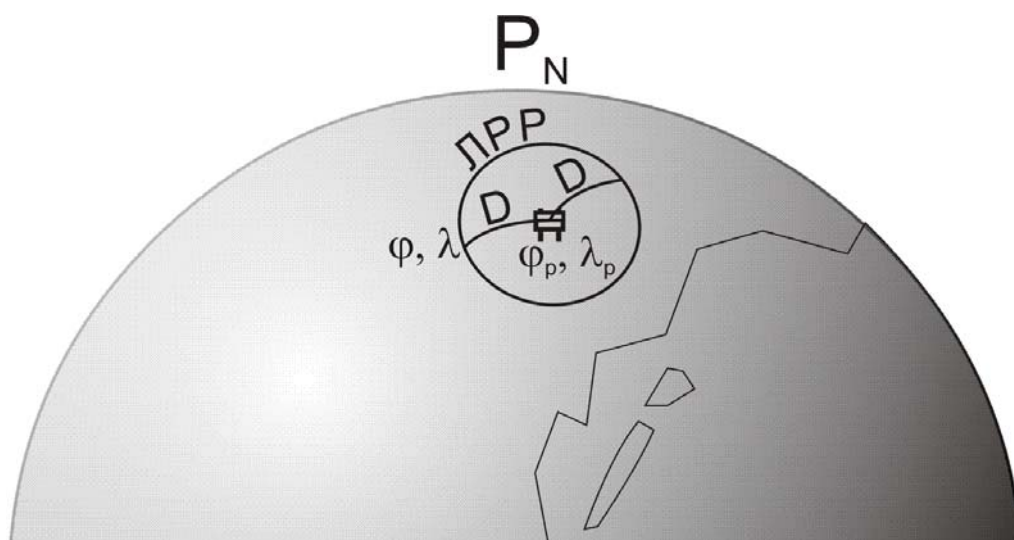


Рис. 4.22. Линия равных расстояний

Линия равных разностей расстояний (ЛРРР). Соответствует навигационному параметру $\Delta D = D_2 - D_1$, то есть разности расстояний от данной точки (самолета) до двух заданных радиостанций (рис. 4.23).

Следовательно, ЛРРР – геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух заданных точек (радиостанций) постоянна.

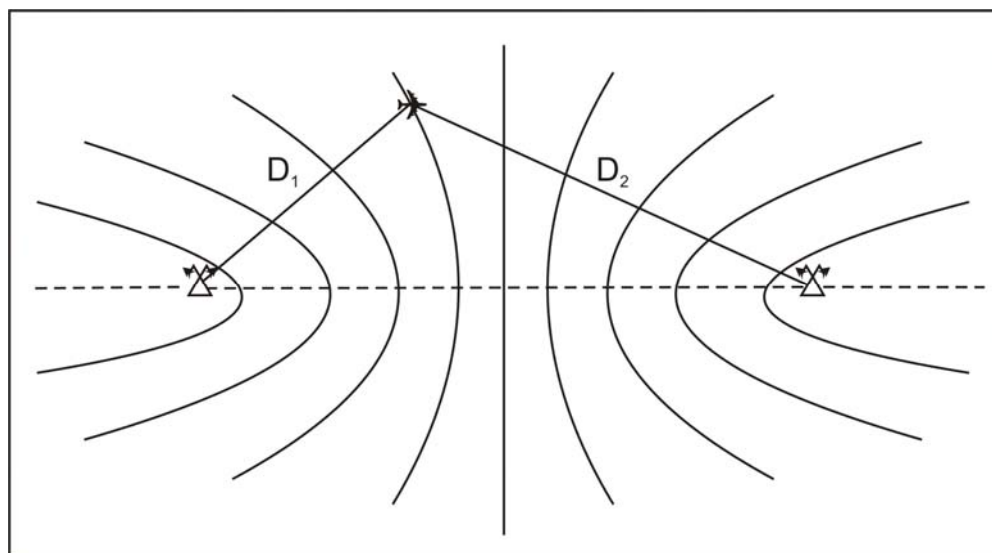


Рис. 4.23. Линии равных разностей расстояний на плоскости

ЛРРР на плоскости имеет формулу гиперболы, фокусами которой являются радиостанции. На сфере это сферические гиперболы, которые, в отличие от плоских гипербол, являются замкнутыми кривыми (рис.4.24).

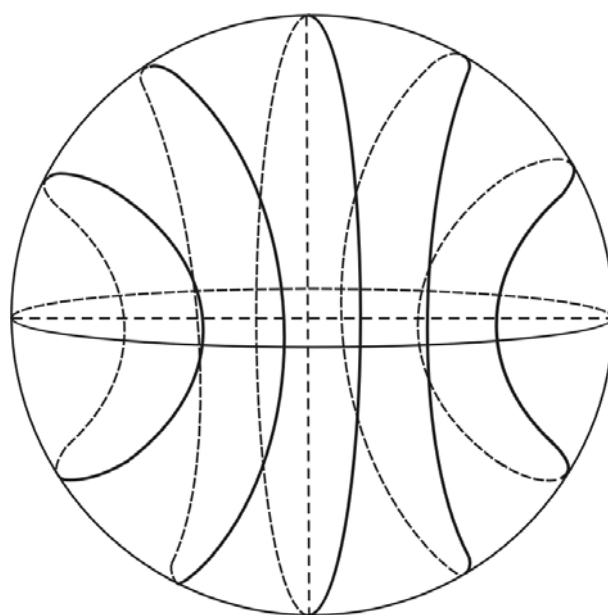


Рис. 4.24. Линия равных разностей расстояний на сфере

Интересно, что на сфере ЛРРР является одновременно и линией равных сумм расстояний до двух заданных точек. На плоскости таким свойством обладает эллипс, поэтому ЛРРР является одновременно и сферической гиперболой, и сферическим эллипсом.

4.10. Геодезическая линия на эллипсоиде

Приведенные выше формулы для расчета путевого угла и длины ортодромии позволяют определять расстояния и направления между двумя точками на поверхности *сферы*. Поскольку на самом деле координаты пунктов на земной поверхности заданы в геодезической системе координат, то есть *на эллипсоиде*, расчет на сфере обладает ограниченной точностью. Возникает вопрос: а можно ли рассчитывать расстояния и направления, не переходя на сферу, то есть непосредственно по геодезическим координатам точек В и L, на поверхности эллипсоида?

Прежде чем ответить на этот вопрос, необходимо выяснить – длину и направление какой именно линии мы хотим определить? Разумеется, речь идет о линии, соединяющей две точки по кратчайшему расстоянию. Такие линии называют геодезическими линиями. Геодезическая линия имеет разную форму в зависимости от того, на какой поверхности она проведена. На плоскости это, очевидно, прямая линия. На поверхности сферы – дуга большого круга (ортодромия). А что представляет собой геодезическая линия на поверхности эллипсоида?

Пусть в точке А проведена нормаль (перпендикуляр) к поверхности эллипсоида. Любая плоскость, проведенная через эту нормаль, пересекает эллипсоид по линии, называемой нормальным сечением эллипсоида. Ранее уже упоминалось о двух главных нормальных сечениях – меридиане и первом вертикале. Но в данном случае проведем плоскость так, чтобы она проходила и через некоторую другую точку В на поверхности эллипсоида. Линию, образованную сечением эллипсоида этой плоскостью называют *прямым нормальным сечением* (на рис. 4.25 это линия АаВ). Практически эту операцию можно проделать с помощью теодолита, если его установить горизонтально в точке А и направить его зрительную ось на В.

Казалось бы, это и будет линия кратчайшего расстояния. Но если мы проделаем эту же операцию в точке В, то есть проведем в ней нормаль, а через нее плоскость, проходящую через точку А, то, оказывается, это будет уже другая плоскость и другая линия – обратное нормальное сечение, из В в А (на рис. 4.25 это ВbА).

Расхождение прямого и обратного нормальных сечений объясняется тем, что нормали к эллипсоиду в точках А и В в общем случае (если точки не на одном меридиане и не на одной параллели) не лежат в одной плоскости, то есть являются скрещивающимися прямыми. Нельзя провести

одну плоскость через обе нормали, можно только через одну из нормалей и точку.

Поскольку точки А и В и проведенные в них сечения абсолютно равноправны, очевидно, что ни одно из нормальных сечений не является линией кратчайшего расстояния – ведь геодезическая линия может быть только одна.

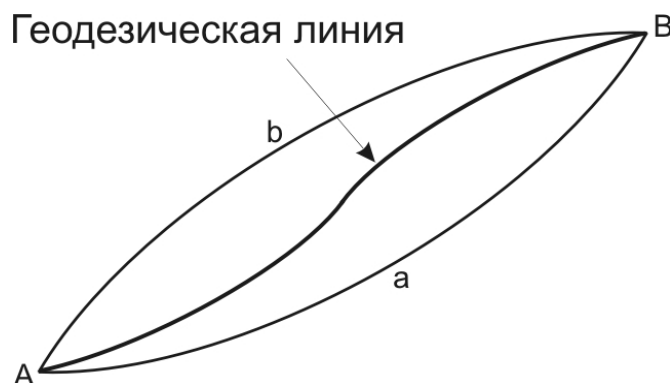


Рис. 4.25. Прямое и обратное нормальные сечения эллипсоида

Геодезические линии на произвольных поверхностях в общем случае изучаются в дифференциальной геометрии (это раздел высшей математики), где дается следующее определение.

Геодезическая линия на произвольной поверхности – это такая кривая, в каждой точке которой соприкасающаяся плоскость проходит через нормаль к поверхности в данной точке.

Нормаль к поверхности – это перпендикуляр к плоскости, касательной к поверхности в данной точке. А *соприкасающаяся плоскость* можно представить себе как плоскость, в которой лежит бесконечно малый отрезок пространственной кривой. Если взять на *пространственной* кривой (то есть не обязательно лежащей в одной плоскости) три произвольные точки, то через них всегда можно провести плоскость. Если теперь крайние точки приближать к средней (обозначим ее М), то и плоскость в общем случае будет менять свое положение. В пределе, когда точки будут находиться на бесконечно малом расстоянии друг от друга, получим соприкасающуюся плоскость в средней точке М.

Так вот, если кривая проведена так, что во всех точках соприкасающаяся плоскость проходит через нормаль к поверхности, на которой нанесена кривая, то эта кривая и будет геодезической линией.

Например, на сфере дуга большого круга (ортодромия) является геодезической линией, поскольку нормаль к сфере (ее радиус) всегда лежит в плоскости ортодромии, которая и является соприкасающейся плоскостью. А вот параллель не является геодезической линией, поскольку ее плоскость не проходит через нормаль к сфере.

На поверхности эллипсоида геодезическая линия имеет сложный вид. В общем случае она проходит между прямым и обратным сечениями, причем сначала ближе к прямому (отстоит от него на одну треть угла между двумя сечениями), а потом ближе к обратному, также на одну треть угла (рис.4.25). И только в частных случаях, когда точки находятся на одном меридиане или на одной параллели, оба нормальные сечения и геодезическая линия совпадают.

В отличие от ортодромии на сфере, геодезическая линия на эллипсоиде, если ее продолжать за пределы отрезка А и В, то есть провести по всему эллипсоиду, не является замкнутой линией. Она не вернется в ту же точку, из которой ее начали проводить, а будет как бы обвивать эллипсоид бесконечным количеством витков.

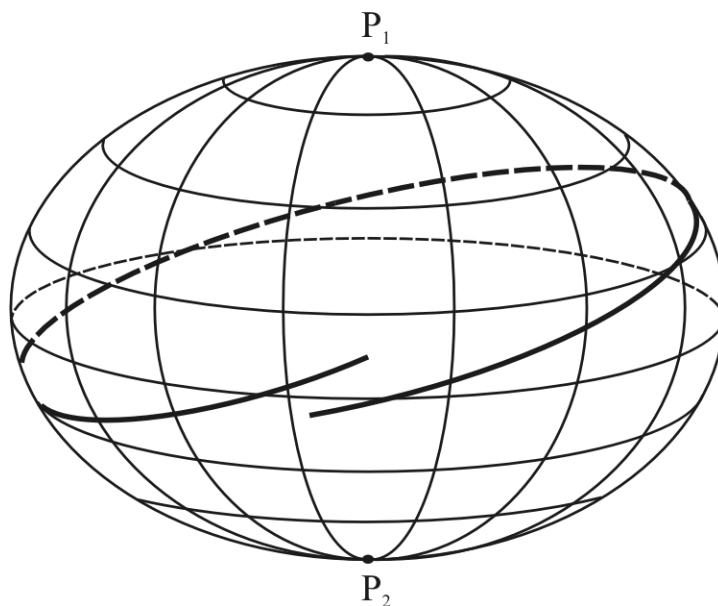


Рис. 4.26. Геодезическая линия на эллипсоиде

В высшей геодезии доказывается, что на эллипсоиде геодезическая линия обладает следующим свойством.

В каждой точке геодезической линии *произведение радиуса параллели на синус путевого угла (азимута) геодезической линии есть величина постоянная.*

$$r \sin \beta = \text{const.}$$

Учитывая, что радиус параллели на эллипсоиде

$$r = N \cos B,$$

можно записать

$$N \cos B \sin \beta = \text{const.}$$

Отсюда вытекает и частный случай – основное свойство ортодромии на сфере (4.10). Это не удивительно, поскольку сфера – частный случай эллипсоида, а ортодромия и есть геодезическая линия на сфере.

4.11. Определение расстояний и направлений на поверхности эллипсоида

Поскольку геодезическая линия на эллипсоиде является довольно сложной кривой, понятно, что определение ее длины и направления также является непростой задачей. Если построить на эллипсоиде сфероидический треугольник, аналогичный сферическому треугольнику на сфере (рис. 4.26), то его стороны не будут, конечно, дугами больших кругов (их на эллипсоиде не существует). Две стороны такого треугольника являются меридианами и, следовательно, отрезками эллипса, а третья сторона – геодезическая линия. Рассмотренные выше формулы *сферической* тригонометрии на эллипсоиде, разумеется, не применимы.

Вместе с тем, задачи по точному расчету расстояний и направлений между пунктами с известными координатами, а также по определению геодезических координат пункта по известному расстоянию и направлению от другого пункта, возникали у ученых и геодезистов еще с XIX века. В геодезии такие задачи называют главными геодезическими задачами. Их две – прямая и обратная.

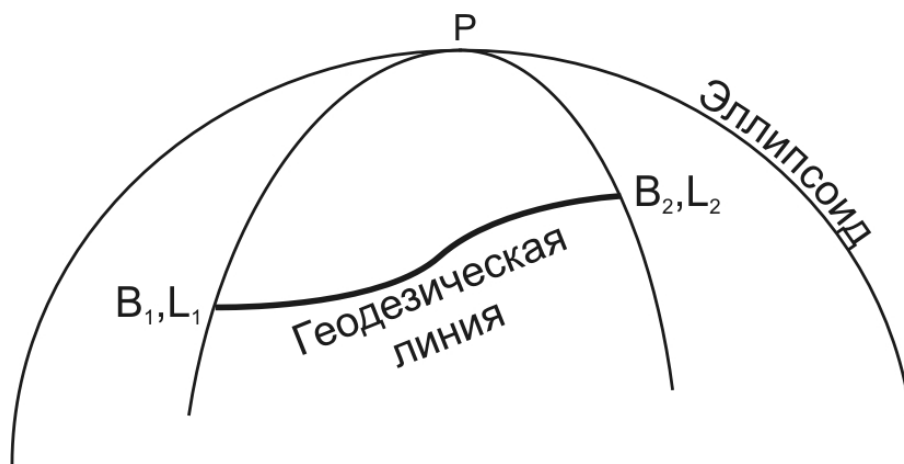


Рис. 4.26. Сфероидический треугольник

Прямая геодезическая задача.

Дано: геодезические координаты $B_1; L_1$ точки А;
азимут (путевой угол) A_{1-2} геодезической линии из А в В;
длина геодезической линии S .

Найти: координаты B_2 и L_2 для точки В и азимут A_{2-1} (рис. 4.27 (а)).

В навигации задача такого рода возникает при счислении координат, когда известны начальные координаты ВС, направление его движения и пройденное расстояние, а необходимо найти текущие координаты ВС.

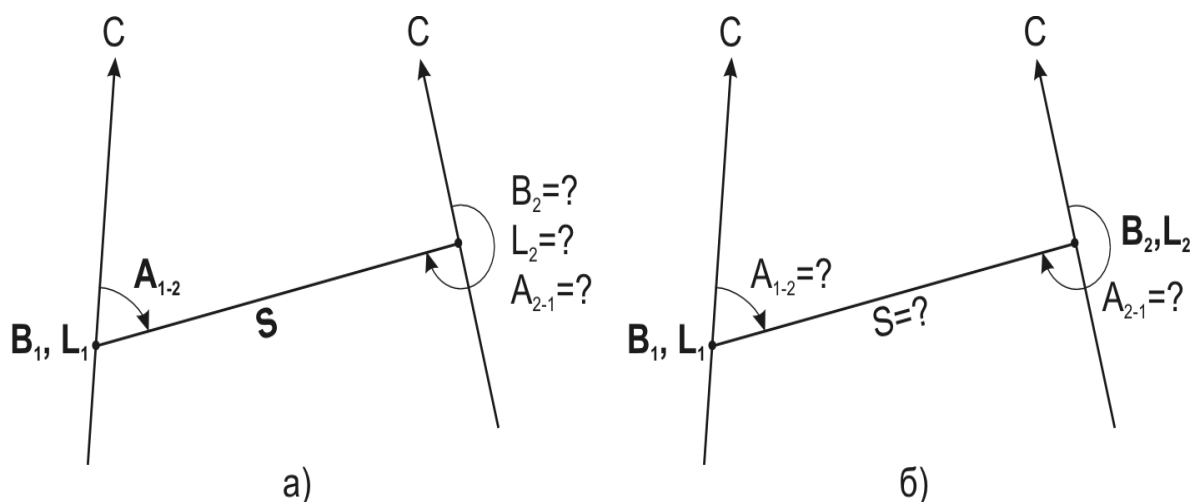


Рис. 4.27. Прямая (а) и обратная (б) геодезические задачи

Обратная геодезическая задача.

Дано: геодезические координаты точек А и В (B_1, L_1 и B_2, L_2).

Найти: расстояние между точками S ,
азимуты (путевые углы) из точки А на точку В и обратно (A_{1-2} и A_{2-1}).

В навигации такую задачу приходится решать, например, при расчете путевого угла и длины участка маршрута. Собственно, рассмотренный выше расчет путевого угла и длины ортодромии и являлся решением обратной геодезической задачи, но только на сфере.

На протяжении десятилетий и даже столетий разрабатывались разнообразные методы решения главных геодезических задач, обеспечивающие требуемую (как правило, очень высокую) точность и главное, удобные для практических вычислений. Ведь вычислительная техника появилась только во второй половине XX века. В этих методах, чтобы обойти проблему «неберущихся» интегралов (например, выражающих длину меридиана) широко используется разложение различных функций в бесконечный ряд. При этом для выполнения расчетов берут столько членов этого ряда, сколько необходимо для получения требуемой точности

Например, способ Шрейбера позволяет рассчитать координаты пунктов с точностью $0,0001''$, а азимуты с точностью $0,001''$, если расстояние между пунктами не превышает 100 км. При расстояниях до 600 км эти же формулы, обеспечивают получение координат с точностью до $0,1''$.

Метод решения геодезических задач с помощью центрального сечения эллипсоида позволяет рассчитывать длину любой геодезической линии с погрешностью не более 0,5 м, а азимут - $1-2''$.

Эти и другие методы описываются довольно громоздкими формулами, которые можно найти в учебниках по высшей геодезии.

Существует ли метод, который позволяет определить расстояние и азимут (путевой угол) абсолютно точно? Существует. Но не *абсолютно* точно, а с *любой* требуемой точностью (до метра, миллиметра, микрона...). Это метод, предложенный немецким ученым *Фридрихом Вильгельмом Бесселем (1784-1846)* в 1825 г..

Общая идея решения геодезических задач методом Бесселя заключается в переходе от треугольника на эллипсоиде к сферическому треугольнику на вспомогательной сфере. После решения сферического треугольника, осуществляется обратный переход на эллипсоид. Но при этом появляется расхождение координат, вызванное тем, что решение осуществлялось на сфере. На эллипсоиде треугольник с рассчитанными сторонами и углами не будет являться замкнутой фигурой (стороны разойдутся). В зависимости от величины расхождения определяется поправка и процесс расчета повторяется столько раз, сколько необходимо для достижения требуемой точности, то есть пока поправка на очередном шаге не станет меньше наперед заданной малой величины.

Таким образом, метод Бесселя является итерационным, то есть методом последовательных приближений. На каждой итерации выполняется расчет по 12 формулам. Кроме того, до начала итераций по 11 формулам проводятся подготовительные вычисления, а в конце - по трем формулам заключительные вычисления после окончания итераций. Чем выше требуемая точность, тем большее количество итераций необходимо сделать.

Понятно, что, несмотря на любую потенциально достижимую точность при любых расстояниях между точками, способ Бесселя не мог широко применяться до появления вычислительной техники.

5. АВИАЦИОННАЯ КАРТОГРАФИЯ

5.1. Понятие о картографической проекции

Задачей картографии является правильное изображение земной поверхности на плоскости, то есть карте. Изобразить сравнительно небольшой участок земной поверхности нетрудно. Достаточно уменьшить размеры всех отображаемых объектов и нарисовать их на листе бумаги в соответствии с расположением на местности. Такое изображение в крупном масштабе малых участков Земли без практически заметных искажений называется *планом*. Можно составить план комнаты, садового участка, даже территории аэродрома.

Но территорию более значительных размеров изобразить без искажений невозможно. Ведь Земля «круглая», а лист бумаги плоский. Если попытаться, например, изобразить на листе бумаги сферический

треугольник на земной сфере, уменьшив его стороны в соответствии с выбранным масштабом, то окажется, что углы плоского треугольника не будут совпадать с углами сферического. А если добиться правильного изображения углов, то не будут совпадать стороны.

Одно из ключевых положений математической картографии заключается в том, что *поверхность сферы (а тем более эллипсоида) изобразить на плоскости без искажений невозможно*. Это положение доказывается математически, но в его справедливости мог убедиться каждый, кому приходилось, надрезав резиновый мяч, попытаться распрямить его в плоскость. Распрямить, конечно, можно, но только путем сжатий и растяжений его поверхности, при которых рисунок на поверхности мяча деформируется.

Не всякое изображение территории больших размеров можно назвать картой.

Карта – это сплошное, то есть без разрывов и складок, изображение поверхности Земли или отдельных ее частей на плоскости, выполненное по определенному закону.

Под законом понимается строгое взаимное соответствие точек на Земле и на карте. Поэтому, например, изображение от руки Африки или Европы, даже если оно будет похоже по очертаниям на оригинал, картой не является.

Закон, по которому устанавливается соответствие точек на Земле и на карте, называется *картографической проекцией* карты.

Положение любой точки на Земле характеризуется ее координатами – широтой и долготой. Либо сферическими - φ и λ , если Земля принимается за сферу, либо геодезическими - B и L , если Земля принимается за эллипсоид.

Чтобы определить, в каком месте эта точка должна быть изображена на плоскости (карте), нужно определить ее координаты на плоскости. Но на плоскости используются совсем другие системы координат, чем на сфере. На плоскости в принципе не может быть широты и долготы – достаточно вспомнить определение широты: угол между плоскостью экватора и... Здесь нет ни плоскости экватора, ни плоскости меридиана, ни самих меридианов и параллелей. На карте может быть лишь *изображение* меридианов и параллелей - картографическая сетка. Но в этом и состоит задача математической картографии – изобразить картографическую сетку в соответствии с принятым законом соответствия точек на сфере и плоскости. Собственно, картография и занимается именно сетками, а не самими наземными объектами. Если сетка уже изображена, нанести по ней населенные пункты, дороги и другие объекты уже не трудно.

На плоскости для построения карты используют обычные, «плоские», системы координат. Наиболее часто используется всем известная прямоугольная декартова система OXY , а также полярная система координат, в которой координатами являются угол δ между опорным направлением и направлением на точку и расстояние ρ от точки до начала системы координат

(аналогично пеленгу и дальности). Вопрос выбора системы координат на плоскости не принципиален, зависит от удобства.

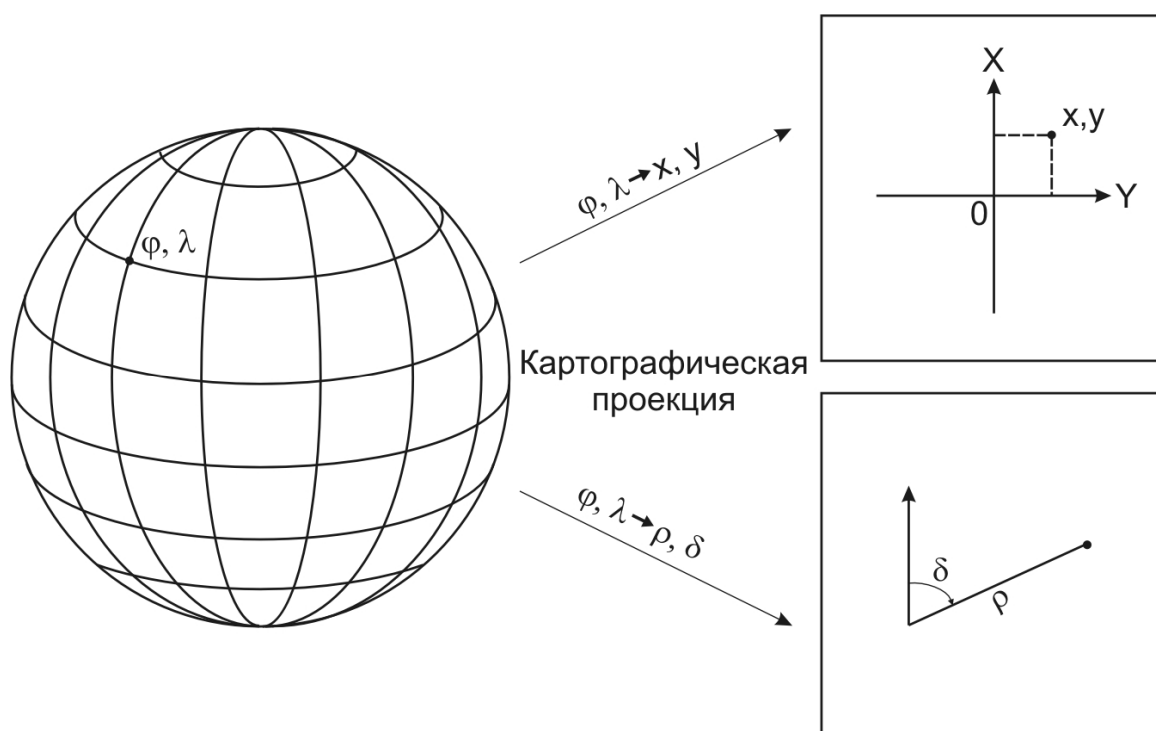


Рис. 5.1. Картографическая проекция

Картографическая проекция – это математические формулы или алгоритм, которые определяют связь между координатами точки (φ, λ или B, L) на поверхности Земли и координатами этой точки на плоскости – прямоугольными (x, y) или полярными (ρ, δ). Эти формулы называются *уравнениями проекции*.

В общем виде они могут быть записаны как

$$\begin{aligned} x &= f_1(\varphi, \lambda); \\ y &= f_2(\varphi, \lambda); \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \rho &= f_1(\varphi, \lambda) \\ \delta &= f_2(\varphi, \lambda) \end{aligned}$$

Подставляя в правые части формул координаты любых точек на сфере, можно получать координаты этих точек на бумаге и таким образом перенести все точки на плоскость. Конечно, на самом деле достаточно перенести только сетку меридианов и параллелей.

Проекцией здесь является сам вид функций f_1 и f_2 , определяющий, как именно зависят координаты на плоскости от координат на сфере.

Картографических проекций бесконечно много. Любые произвольно записанные функции, лишь бы они были непрерывными и однозначными, будут определять какую-то картографическую проекцию. Другое дело, насколько хорошими свойствами она будет обладать, например, для целей навигации.

Функциональная связь сферических (геодезических) и плоских координат не обязательно должна выражаться определенной формулой. Главное, чтобы эта связь была вполне определенной, а установлена она может быть любым способом – например, алгоритмом, то есть порядком построения картографической сетки.

Термин «проекция» часто используется в аналитической и начертательной геометрии, в черчении, технике. Поэтому он ассоциируется с чем-то геометрическим - проектированием точки или фигуры на плоскость или прямую с помощью лучей, прямых линий. Необходимо подчеркнуть, что в картографии этот термин имеет более общий и широкий смысл и вовсе не обязательно связан с геометрическим проектированием. Действительно, часто уравнения проекции могут быть наглядно проиллюстрированы геометрически – как будто сфера лучами проектируется на плоскость, цилиндр или другую вспомогательную поверхность. Но это лишь иллюстрация, облегчающая изучение проекции, и хорошо, если она существует. Большинство используемых в навигации проекций трудно или невозможно проиллюстрировать геометрически. Но это и не обязательно. Картографическая проекция – это закон, связывающий координаты на земле и на карте, и задан он может быть любым способом.

5.2. Масштаб

Главный масштаб. При составлении карты возникают две проблемы. Одна из них маленькая и легко решаемая, а вторая гораздо более сложная.

Первая «проблема» заключается в том, что Земля большая, а лист бумаги, на котором ее нужно изобразить (карта), - маленький. Поэтому Землю необходимо в первую очередь уменьшить. При этом речь идет уже не о реальной физической поверхности Земли со всеми ее неровностями, а о ее модели – сфере или эллипсоиде, на которые спроектированы реальные земные объекты. Уменьшенная модель Земли – это глобус. Такой термин и используется в картографии.

Главный масштаб (M) - характеризует степень уменьшения Земли до размеров глобуса и равен отношению длины отрезка на глобусе к длине соответствующего ему отрезка на Земле.

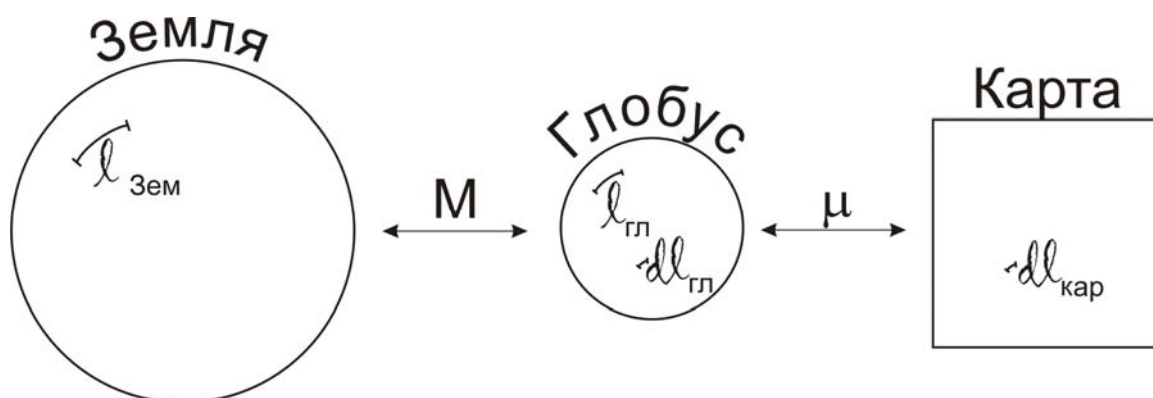


Рис. 5.2. Главный и частный масштабы

То есть, главный масштаб – это число, полученное делением длин соответствующих друг другу отрезков на глобусе и земной поверхности. На обрезе любой карты обязательно указывается главный масштаб, но форма, в которой он выражен, может быть разная.

Численный масштаб – это главный масштаб непосредственно выраженный в виде дроби (отношения) отрезков на глобусе $l_{гл}$ и Земле $l_{зем}$. Например,

$$M = \frac{l_{гл}}{l_{зем}} = \frac{1}{500000} = 1:500000.$$

Для математически правильного определения этого отношения необходимо, чтобы единицы измерения обоих отрезков были одинаковы, но неважно какие именно: метры, сантиметры, дюймы... Не имеет значения и длина отрезка. Действительно, если отрезку на глобусе длиной 1 см соответствует на Земле 1 000 000 сантиметров, то $M=1:1\,000\,000$. Но если взять отрезок в 3 дюйма, то ему будет соответствовать на Земле 3 000 000 дюймов, а их отношение (масштаб) останется тем же.

Графический масштаб, как форма выражения главного масштаба, строится на карте для измерения расстояний с помощью циркуля. Простейший его вид – линейный масштаб, представляющий собой прямую линию, разделенную на части и оцифрованную в соответствии с главным масштабом (рис. 5.3).

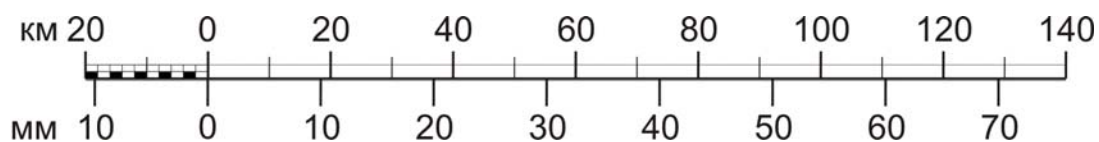


Рис.5.3. Графический масштаб

Первое из делений графического масштаба обычно разделено на более мелкие части, чтобы определять расстояния более точно. Пользуются линейным масштабом следующим образом. Ножки циркуля устанавливают на нужные пункты на карте, а затем переносят циркуль на изображение линейного масштаба. Правую ножку ставят на одно из оцифрованных делений так, чтобы левая попала на первый отрезок с более мелкими делениями. После этого отсчитывают расстояние как сумму значения указанного у правой ножки плюс значение, определенное по левой ножке циркуля.

Натуральная форма выражения главного масштаба предназначена, видимо, для людей, не сведущих в картографии. В этом случае на карте просто пишут, например: «в 1 см 20 км». Чтобы перевести численную форму масштаба (например, 1:350000) в натуральную, нужно знаменатель масштаба разделить на 100 000 (столько сантиметров в одном километре), для чего достаточно передвинуть десятичную запятую на пять знаков (отбросить пять нулей). В данном примере получится в 1 см 3,5 км.

На зарубежных картах часто указывают количество морских миль в одном дюйме. Перевести масштаб из такой формы в более привычную (количество километров в сантиметре) нетрудно, учитывая, что 1 морская миля (nautical mile) составляет 1852 метра, а 1 дюйм (inch) 2,54 см. Получается, что масштаб в 1 милю в дюйме соответствует 0,729 км в сантиметре (с точностью до трех знаков после запятой). Значит, на это число и нужно умножить количество миль в дюйме, чтобы получить количество километров в сантиметре. Для приближенной прикидки можно использовать округленное число $0,75 = \frac{3}{4}$. Например, если указан масштаб 20 миль в дюйме, то это примерно $20 \cdot \frac{3}{4} = 15$ км в сантиметре (более точно 14,58 км).

Очевидно, что при уменьшении Земли до размеров глобуса никаких искажений формы объектов на ее поверхности не произойдет. То, что было круглым, треугольным или квадратным на Земле, таким же останется и на глобусе. Только расстояния, длины сторон фигур уменьшатся в соответствии с главным масштабом. Поскольку одинаково уменьшаются все расстояния, то углы фигур остаются неизменными.

Частный масштаб. Вторая из упомянутых проблем – как уже уменьшенную Землю, то есть глобус, «развернуть» в плоскость и как оценить неизбежно возникающие при этом искажения.

В приведенном примере с мячом очевидно, что поверхность мяча, при ее распрямлении в плоскость, придется в некоторых местах растянуть, в некоторых сжать. Отрезок, который на круглом мяче (глобусе) соответствовал, например, 20 км земной поверхности, на распрямленном мяче будет соответствовать этому же расстоянию, но его длина будет другой вследствие растяжения или сжатия. Каждый сантиметр на распрямленном

мяче будет соответствовать другому количеству километров. При этом искажения в общем случае будут различны в разных точках распрямленного мяча (карты) и даже в одной точке могут быть разными в зависимости от ориентации рассматриваемого отрезка. Ведь, возможно, по какому-то направлению мяч пришлось растянуть, а в перпендикулярном направлении – сжать.

Искажения, возникающие при отображении сферы (эллипсоида) на плоскость, характеризует *частный масштаб*. При этом под сферой (эллипсоидом) понимается уже уменьшенная Земля, то есть глобус. Частный масштаб, аналогично главному, тоже является отношением двух отрезков – на карте и на глобусе.

Частный масштаб (μ) – это отношение длины бесконечно малого отрезка на плоскости (карте), взятого в данной точке по данному направлению, к длине соответствующего ему бесконечно малого отрезка на глобусе.

Обозначая длины бесконечно малых отрезков как дифференциалы, можно записать это отношение как:

$$\mu = \frac{dl_{кар}}{dl_{гл}} \approx \frac{l_{кар}}{l_{гл}}$$

Если отрезки не бесконечно малые, но не очень невелики, то отношение их длин будет приближенно равно частному масштабу.

При рассмотрении главного масштаба отмечалось, что длины отрезков могут быть любые – их отношение (главный масштаб) от этого не изменится. Но в определении частного масштаба речь идет именно о бесконечно малых отрезках, потому что в каждой точке карты частный масштаб (степень растяжения или сжатия) разный. Ведь если взять на карте отрезок конечной длины (например, 1 см), то во всех его точках значение μ будет различным. Поделив его длину на длину соответствующего отрезка на глобусе, получим некоторое среднее значение масштаба на данном отрезке. Но если взять отрезок короче (например, 1 мм), то и средний масштаб будет другим. Для того, чтобы точнее характеризовать искажения именно в конкретной точке, необходимо брать отрезок как можно короче. В пределе – бесконечно малый. А бесконечно малый отрезок по сути это и есть точка.

В определении частного масштаба говорится об отрезке, взятом «по данному направлению». Это является следствием того, что даже в одной точке частный масштаб может быть разным в зависимости от того, в каком направлении ориентирован отрезок (с севера на юг, с запада на восток...), поскольку степень растяжения или сжатия по разным направлениям может быть различной.

Таким образом, получается, что если главный масштаб у карты лишь один (общая степень уменьшения Земли до размеров глобуса), то частных масштабов бесконечно много. Во-первых, потому, что во всем бесконечном

множестве точек на карте – они разные, а, во-вторых, потому что, в каждой точке их тоже бесконечно много – в зависимости от ориентации отрезка.

Частный масштаб характеризует искажение длин на карте в данной точке по данному направлению по сравнению с глобусом. Если например, отрезки на карте и на глобусе равны, то $\mu=1$. Если же на глобусе отрезок был 10 мм, а на карте он превратился в 8 мм, то

$$\mu \approx \frac{l_{кар}}{l_{гл}} = \frac{8}{10} = 0,8 .$$

В данном примере стоит знак приближенного равенства, поскольку на самом деле необходимо брать отношение бесконечно малых отрезков.

Очевидно, что, если μ меньше единицы, то на карте длина отрезка меньше, чем на глобусе. По данному направлению все сжато. Соответственно при $\mu>1$ на карте все растянуто.

Таким образом, главный масштаб M связывает большую Землю с маленьким глобусом, а частный масштаб μ связывает глобус с картой (рис. 5.2). И то, и другое – отношение отрезков. При этом всегда делят то, что получилось, на то, что было (глобус на Землю, карту на глобус).

Если же необходимо получить сразу отношение отрезка на карте к отрезку на Земле (минуя глобус), можно просто перемножить μ и M . Например, если M 1:1 000 000 (в 1 см 10 км), а в данной точке карты $\mu=0,5$ (все вдвое сжато), то получим

$$\frac{1}{1000000} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2000000} = 1:2\,000\,000 .$$

То есть, в данном месте 1 см карты соответствует 20 км на земной поверхности, хотя на глобусе этот же сантиметр соответствовал 10 км. При разворачивании глобуса в плоскость произошло сжатие и в сантиметр «уместилось» большее расстояние.

При отображении сферы (эллипсоида) на плоскость, искажаются не только длины отрезков, но и площади объектов. Аналогично частному масштабу длин вводится понятие масштаба площадей.

Масштабом площадей P называется отношение бесконечно малой площади на карте к соответствующей ей площади на глобусе.

$$P = \frac{dS_{кар}}{dS_{гл}} \approx \frac{S_{кар}}{S_{гл}}$$

В навигации, конечно, площади объектов не используются. Но в других отраслях, например при определении по карте площадей сельскохозяйственных угодий, знать значение P , необходимо.

5.3. Основные понятия теории искажений

Эллипс искажений. Как уже отмечалось, при отображении сферы или эллипсоида на плоскость искажаются длины, площади, углы. Это означает, что значения этих величин на плоскости не соответствуют их значениям на земной поверхности. Способов отображения, то есть картографических проекций, существует бесконечно много и каждому из них свойственны собственные законы искажений. Но при этом имеются и общие закономерности, присущие любой проекции. Они рассматриваются в теории искажений – разделе математической картографии. Рассмотрим основные из этих закономерностей.

Возьмем на глобусе любую точку O и опишем вокруг нее окружность бесконечно малого радиуса r (рис.5.4). Произвольно выберем направления осей прямоугольной системы координат X и Y .

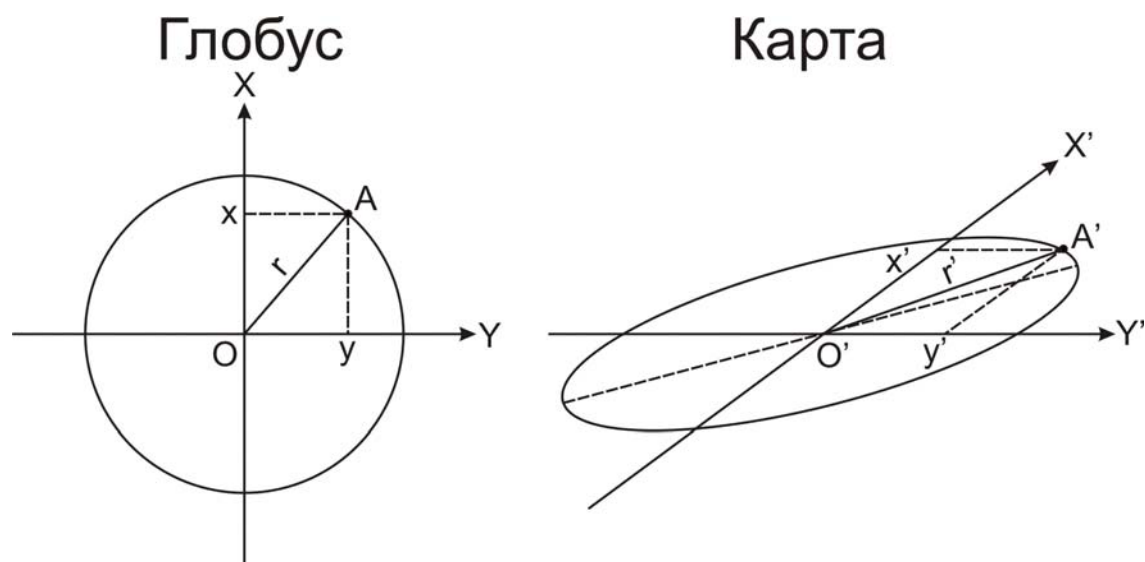


Рис. 5.4. К выводу уравнения эллипса искажений

Так как окружность бесконечно малая, можно считать ее плоской. Тогда координаты x и y любой точки A на этой окружности связаны соотношением

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (5.1)$$

На плоскости (карте) точка O изобразится точкой O' , точка A точкой A' . Окружность изобразится некоторой замкнутой кривой. Замкнутой она будет потому, что любая проекция должна являться *непрерывным* отображением.. Оси $O'X'$ и $O'Y'$ в бесконечно малой окрестности точки O' также можно считать прямыми, но в общем случае они пересекутся не под прямым углом.

Обозначим через μ частный масштаб по оси OX , а через ν - по оси OY .

Отрезки x и y , а также их изображения x' и y' , бесконечно малые, поэтому, в соответствии с определением частного масштаба

$$\mu = \frac{x'}{x}; \quad \nu = \frac{y'}{y}.$$

Откуда

$$x = \frac{x'}{\mu}; \quad y = \frac{y'}{\nu}.$$

Подставив в уравнение (5.1) и поделив на r^2 , получим:

$$\left(\frac{x'}{\mu r} \right)^2 + \left(\frac{y'}{\nu r} \right)^2 = 1.$$

Это соотношение представляет собой уравнение эллипса с полуосями μr и νr в косоугольной системе координат $O'X'Y'$.

Таким образом, можно сделать важный и интересный вывод: *всякий бесконечно малый кружок на глобусе изображается на карте любой проекции в виде бесконечно малого эллипса.*

На первый взгляд это может показаться странным. Ведь речь идет о любой, совершенно произвольной проекции. Нигде в приведенном выводе формулы не накладывались ограничения на способ отображения. Неужели кружок на поверхности мяча при распрямлении его на плоскость нельзя превратить в какую-то другую фигуру, кроме эллипса? Конечно, можно, но только если это кружок конечного размера. Тогда: какую-то часть кружка можно растянуть, другую поджать...

Но здесь идет речь о *бесконечно малом* кружке, по сути – о точке. А точка, в соответствии с определением Евклида, «это то, что не имеет частей». Растянуть и поджать отдельные ее части не удастся. Поэтому, как следует из математики, обязательно получится эллипс.

Направление большой и малой осей этого эллипса (они, конечно, перпендикулярны) называют *главными направлениями* в данной точке карты. В общем случае в разных точках карты главные направления различны, то есть эллипс ориентирован по-разному.

Примем, что радиус исходной окружности на глобусе $r = 1$ (радиус не имеет принципиального значения, поскольку окружность бесконечно малая). Тогда полуоси эллипса будут равны μ и ν . Переобозначим их в соответствии с общепринятыми для эллипса символами ($a = \mu$; $b = \nu$) и получим.

$$\left(\frac{x'}{a} \right)^2 + \left(\frac{y'}{b} \right)^2 = 1.$$

Такой эллипс, являющийся изображением бесконечно малого кружка единичного радиуса, называется *эллипсом искажений*, поскольку он

наглядно показывает для данной точки карты в какую сторону и в какой степени изображение растянуто или сжато.

Нетрудно убедиться, что *радиус эллипса искажений по любому направлению равен частному масштабу по этому направлению*. Ведь частный масштаб – отношение бесконечно малых отрезков на карте и глобусе. А радиусы эллипса и кружка и есть бесконечно малые отрезки. Радиус кружка, конечно, одинаков по всем направлениям и равен единице. А радиус эллипса по разным направлениям различен и его отношение к единице совпадает с ним самим.

В частности, частные масштабы по главным направлениям равны полуосям эллипса искажений, то есть a и b . Один из них наибольший из всех частных масштабов (радиусов эллипса), другой – наименьший.

Искажение длин. Частный масштаб μ характеризует искажение длин (расстояний) по данному направлению. Если известны параметры эллипса искажений a и b , то можно найти частный масштаб μ_α по любому другому направлению, составляющему угол α с направлением большей полуоси эллипса.

Действительно, по определению частного масштаба

$$\mu_\alpha = \frac{r'}{r};$$

где r – радиус окружности на глобусе, а r' – радиус эллипса по выбранному направлению.

Направления осей X и Y на глобусе были выбраны произвольно. Пусть они выбраны так, что их изображения на карте (оси X' и Y') совпадают с большой и малой осями эллипса (рис.5.5).

Тогда, из рис. 5.5,

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Если a – частный масштаб по оси X , а b – по оси Y , то

$$\begin{aligned} x' &= ax, & y' &= by, \\ x &= r \cos \alpha, & y &= r \sin \alpha. \end{aligned}$$

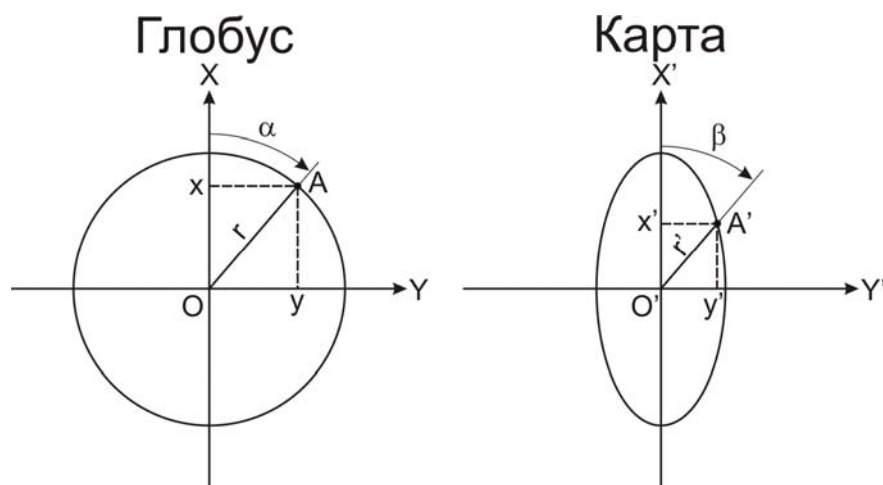


Рис. 5.5. Искажения расстояний и направлений

Последовательно подставив эти выражения в формулу для μ_α , получим:

$$\mu_\alpha = \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}.$$

По этой формуле можно рассчитать частный масштаб, характеризующий искажение длин, по любому заданному направлению. Для этого нужно знать только частные масштабы по главным направлениям a и b и угол, который составляет нужное направление с одним из главных направлений (а именно с тем, по которому частный масштаб обозначен в формуле как a).

Иногда для характеристики искажения длин используется величина ν_α , которая так и называется – «искажение длин».

$$\nu_\alpha = \mu_\alpha - 1.$$

Она может быть выражена и в процентах. Например, если $\mu_\alpha = 1,3$, то

$$\nu_\alpha = \mu_\alpha - 1 = 0,3 = 30\%.$$

Искажение направлений и углов. Кроме расстояний на карте могут искажаться направления и углы.

Направлением в картографии принято называть угол, измеряемый от направления начала отсчета, например, меридиана. Это то, что в навигации называют пеленгом, азимутом. А углом в картографии называют собственно угол между двумя направлениями (разность пеленгов).

На рис.5.6 α_1, α_2 – направления, а δ - угол.

Если считать, что на рис. ось OX совпадает с направлением меридиана, то точка A находится в направлении α . Но на карте изображение A' этой точки находится в общем случае в другом направлении β относительно изображения меридиана $O'X'$. Из рисунка видно, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{y'}{x'}.$$

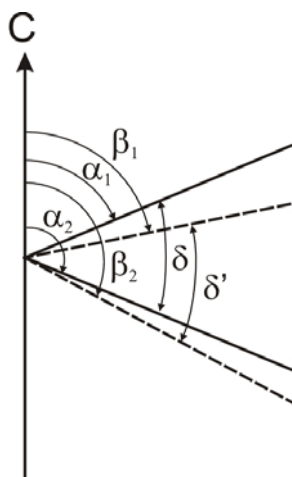


Рис. 5.6. Направления и углы

Учитывая, что $x' = ax$, $y' = by$, можно получить

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \alpha.$$

Следовательно, зная направление на глобусе и частные масштабы по главным направлениям, можно определить направление на карте.

Если изменять α от 0° до 360° , то в таких же пределах будет изменяться и β . Но разность между ними зависит от самого направления и будет то больше, то меньше, меняя знак. На практике представляет интерес наибольшая разность α и β , то есть, на какую величину максимум можно ошибиться при измерении направления на карте в данной точке.

Оказывается, максимальное искажение направлений $\omega = (\alpha - \beta)_{\max}$ также может быть рассчитано по известным a и b по формуле (без вывода):

$$\sin \omega = \frac{a - b}{a + b}.$$

Например, если известно, что в данной точке карты частные масштабы $a = 1,1$, $b = 0,9$, то $\sin \omega = 0,2/2 = 0,1$, откуда $\omega = 5,7^\circ$. То есть, при измерении пеленгов в данной точке карты можно ошибиться максимум на $5,7^\circ$. Здесь, конечно, речь идет о точности самой карты, а не о тщательности графической работы человека с транспортиром.

Максимальное искажение углов, то есть разностей направлений, ровно в 2 раза больше искажения направлений (рис. 5.7):

$$(\delta - \delta')_{\max} = 2\omega.$$

Действительно, самый худший случай, когда для первого направления ошибка имеет максимальное значение в меньшую сторону, а для второго – такое же значение в большую.

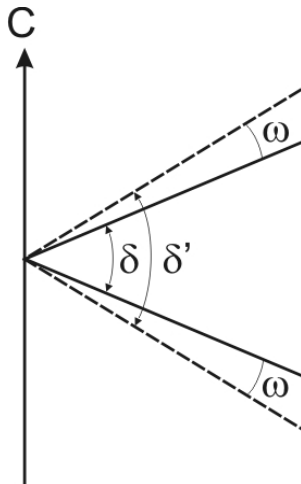


Рис.5.7. Максимальное искажение углов

Искажение площадей. Искажение площадей объектов характеризуют уже упоминавшимся масштабом площадей P , величина которого также может быть найдена с помощью параметров эллипса искажений.

Из математики известно, что площадь кружка (на глобусе) $S_{кр} = \pi r^2$, а площадь эллипса (на карте) $S_{эл} = \pi ab$, где a и b – полуоси эллипса. В эллипсе искажений эти полуоси являются частными масштабами по главным направлениям. Тогда масштаб площадей

$$P = \frac{S_{эл}}{S_{кр}} = \frac{\pi ab}{\pi r^2}.$$

Приняв $r=1$, получим

$$P=ab.$$

Таким образом, зная a и b , можно определить любые искажения на карте в данной точке: расстояний, углов, площадей.

Частные масштабы по меридиану и параллели. Кроме частных масштабов по главным направлениям часто представляют интерес частные масштабы по направлениям меридиана и параллели. Частный масштаб по направлению меридиана принято обозначать m , а по направлению параллели – n . В общем случае эти направления не совпадают с осями эллипса искажений, то есть с главными направлениями в данной точке карты.

В начале данного параграфа направления осей OX и OY в точке O были выбраны произвольно, лишь бы они были перпендикулярны. Но при различном выборе направлений этих осей окажутся разными углы между изображениями этих осей на карте, то есть между $O'X'$ и $O'Y'$.

Оказывается, в любом случае эти направления будут совпадать с направлениями сопряженных диаметров эллипса искажений. В математике диаметром эллипса, сопряженным с другим диаметром, называется такой диаметр, который проходит через середины хорд, параллельных этому другому диаметру.

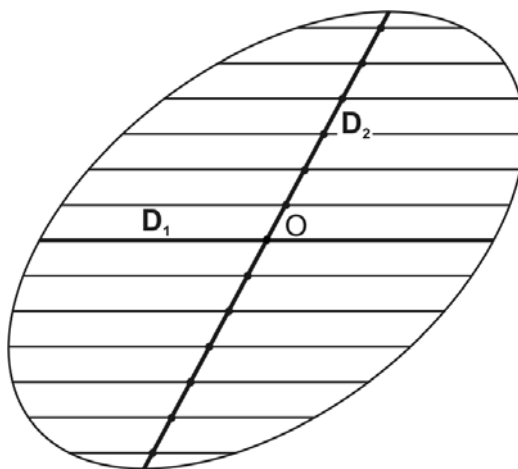


Рис. 5.8. Сопряженные диаметры эллипса

На рис. 5.8 диаметр эллипса D_1 является сопряженным с диаметром D_2 , потому что он проходит через середины хорд, которые параллельны D_1 . Если D_1 является сопряженным с D_2 , то и D_2 является сопряженным с D_1 .

У любого эллипса бесконечно много пар сопряженных диаметров. Но только два из них являются взаимно перпендикулярными – это большая и малая полуоси эллипса. Следовательно, среди множества возможных направлений осей OX и OY на глобусе существует только одна пара таких направлений, которые останутся перпендикулярными при их отображении на карту. Наиболее часто используют такие проекции, в которых эти направления совпадают с направлениями меридианов и параллелей в каждой точке карты. Эти направления и будут главными в каждой точке (рис. 5.9).

Тогда меридианы и параллели на карте будут, как и на глобусе, перпендикулярны друг другу, что вполне разумно и удобно. Такие проекции называют *ортогональными*. В этом случае масштабы по меридиану и параллели m и n и будут являться масштабами по главным направлениям (a и b).

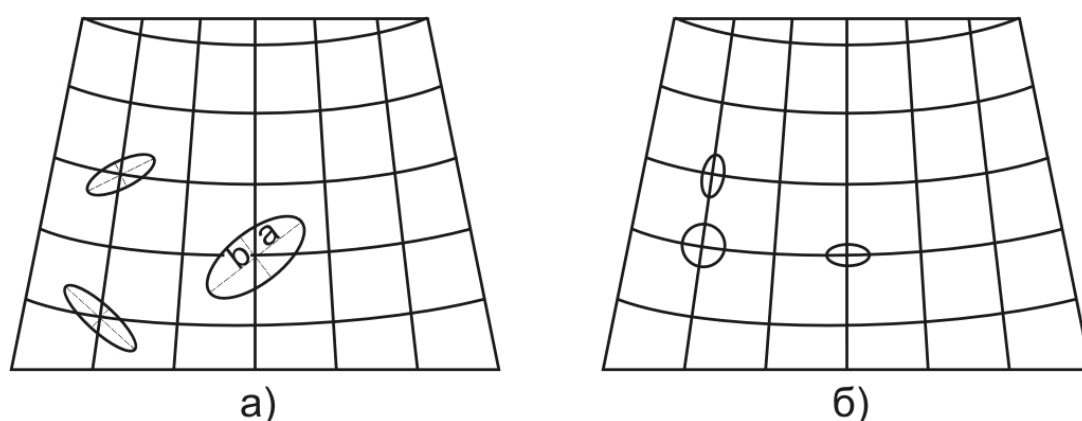


Рис. 5.9. Главные направления и направления меридианов и параллелей:
а) не совпадают б) совпадают

Далее в данной книге, если не оговорено иное, будут рассматриваться именно такие проекции. В этом случае полученные выше формулы для оценки искажений в ортогональных проекциях примут вид:

$$\mu_{\alpha} = \sqrt{m^2 \cos^2 \alpha + n^2 \sin^2 \alpha}. \quad (5.2)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{n}{m} \operatorname{tg} \alpha. \quad (5.3)$$

$$\sin \omega = \frac{m - n}{m + n}. \quad (5.4)$$

$$P = mn. \quad (5.5)$$

В этих формулах изменены только буквенные обозначения частных масштабов.

5.4. Классификация проекций по характеру искажений

Картографические проекции можно разделить на классы в зависимости от того, какие именно величины (углы, расстояния, площади) в данной проекции искажаются, а какие нет. Знать принадлежность конкретной используемой проекции к тому или иному классу необходимо, чтобы правильно пользоваться картой.

1.Равноугольные (конформные) проекции.

Это такие проекции, в которых направления и углы передаются без искажений, то есть углы на карте совпадают с углами на глобусе. Отсюда следует, что бесконечно малые фигуры (например, треугольники) на глобусе и карте подобны друг другу.

Из формулы (5.4) можно видеть, что проекция будет равноугольной (максимальное искажение направлений ω равно нулю), когда

$$m = n.$$

Это и есть условие равноугольности проекции с точки зрения частных масштабов.

Конечно, в разных точках карты m и n не обязательно должны иметь одно и то же значение. Где-то они могут быть больше, где-то меньше, но равны друг другу.

Поскольку частные масштабы по главным направлениям это радиусы эллипса искажений по этим направлениям, то в силу равенства данных масштабов эллипс искажений имеет вид окружности, хотя, возможно, разного радиуса в разных точках карты.

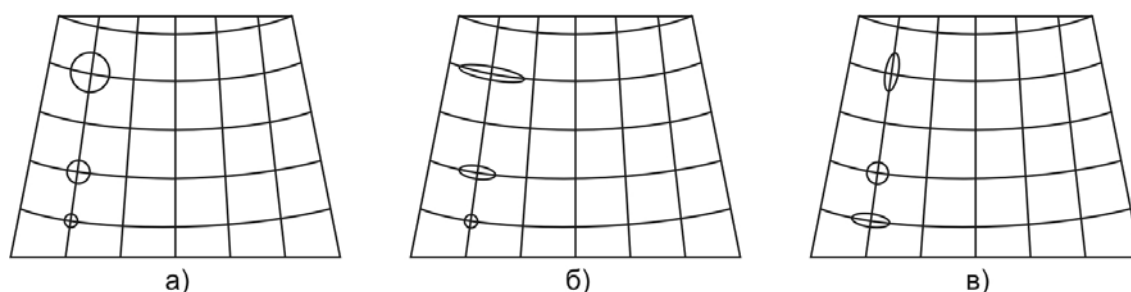


Рис. 5.10. Вид эллипса искажений в равноугольной (а), равнопромежуточной по меридиану (б) и равновеликой (в) проекциях

Равенство углов и подобие бесконечно малых фигур на таких картах в общем случае вовсе не означает, что на карте можно абсолютно точно измерять углы, и что любые, не бесконечно малые, фигуры будут подобны. На глобусе угол измеряется между направлениями на две точки по кратчайшему расстоянию (ортодромиями). А на карте обычно измеряют угол между направлениями, нанесенными в виде прямых линий. Но ортодромия изображается на таких картах вовсе не прямой линией (хотя на аэронавигационных картах близкой к ней), поэтому и угол будет определен не абсолютно точно.

Бесконечно малый кружок на глобусе изображается в равноугольных проекциях также бесконечно малым кружком. Но кружки (и любые другие фигуры) *конечных* размеров искажаются. Ведь частные масштабы в разных точках карты различны. Поэтому, например, северная часть озера может оказаться растянутой в большей степени, чем южная, и поэтому круглое на глобусе озеро примет на карте форму груши или яйца.

Равноугольные проекции широко используются для издания аэронавигационных карт, поскольку на них можно измерять пеленги, путевые углы и другие важные для навигации угловые величины.

2. Равнопромежуточные (эквидистантные) проекции.

В равнопромежуточных проекциях в любой точке *длина отрезка на карте по одному из главных направлений равна длине соответствующего отрезка на глобусе*, то есть расстояния, измеренные по этому направлению, не искажаются. Очевидно, что отношение отрезков (частный масштаб) равно единице. Для ортогональных проекций, в которых главные направления совпадают с меридианом и параллелью, с точки зрения частных масштабов условие равнопромежуточности можно записать как

$$m = 1 \text{ или } n = 1.$$

То есть, или то, или другое. Можно ли построить проекцию, в которой оба частных масштаба были равны единице, то есть равнопромежуточную по двум направлениям? Если бы это удалось сделать, то частный масштаб (радиус эллипса искажений) оказался бы равен единице и по всем другим направлениям – ведь эллипс превратился бы в окружность. Проекция была бы равнопромежуточной по всем направлениям, никакие расстояния бы не искажались. Но проекция одновременно была бы и равноугольной, ведь везде $m = n$. Автоматически без искажений передавались бы и площади объектов. Это означало бы, что никаких искажений на карте нет, то есть удалось поверхность сферы перенести на плоскость без искажений! Но это невозможно.

Эллипс искажений в равнопромежуточных проекциях имеет во всех точках карты постоянный (равный единице) радиус по тому направлению, по

которому проекция равнопромежуточна. По перпендикулярному направлению радиус может быть разным в различных точках карты.

На рис.5.10 (б) показан вид этого эллипса для проекции, равнопромежуточной по меридиану.

В навигации равнопромежуточные проекции не нашли распространения. Ведь расстояния необходимо правильно измерять по всем направлениям, а не по одному избранному. Да и углы будут передаваться с искажениями, поскольку равнопромежуточность проекции исключает ее равноугольность.

3. Равновеликие (эквивалентные проекции).

В равновеликих проекциях площади фигур на карте равны площадям соответствующих фигур на глобусе. В этом случае масштаб площадей $P=mn$ должен быть равен единице, то есть условием равновеликости проекции является

$$mn = 1.$$

Конечно, форма и размеры фигур в таких проекциях могут значительно искажаться, сохраняются только площади. Бесконечно малый кружок на глобусе изображается на картах в равновеликих проекциях в виде эллипса, площадь которого равна площади кружка (рис.5.10 (в)).

4. Произвольные

Все остальные проекции, то есть такие, в которых искажаются и расстояния, и углы, и площади, называются произвольными.

Несмотря на, казалось бы, бесполезность таких проекций, они находят широкое применение. Ведь при использовании карт необходимо измерять и расстояния, и углы, и площади. Но любая проекция может обеспечить точное измерение только чего-то одного. Поэтому специально разрабатывают такие виды картографических проекций, в которых искажается все, но понемногу. Так, чтобы при практической работе с линейкой и транспортиром искажения карты были незаметны, например, не превышали доли миллиметра и градуса.

5.5. Классификация проекций по виду нормальной сетки

Сетка меридианов и параллелей на Земле (глобусе) называется *географической сеткой*. Ее изображение на карте называется *картографической сеткой*. В зависимости от способа отображения сферы на плоскость, то есть от картографической проекции, форма меридианов и параллелей картографической сетки будет различной и подчас очень сложной. Кроме того, как упоминалось в п. 3.2, на Земле (глобусе) можно задать множество различных сферических систем координат и

картографическая сетка для каждой из них будет иметь разный вид в одной и той же проекции. Та из этого множества сеток, которая в данной проекции имеет наиболее простой вид, называется *нормальной сеткой*.

Приведем пример, опирающийся на геометрическое представление проекции. Пусть глобус, с нанесенной на нем сеткой меридианов и параллелей, изготовлен из полупрозрачного материала. В центре глобуса – электрическая лампочка. На глобусе размещен плоский экран (карта), перпендикулярный к оси глобуса и касающийся его в точке полюса. При включении лампочки меридианы и параллели спроектируются на экран (карту). Нетрудно представить, что меридианы на такой карте будут иметь вид прямых линий, расходящихся из точки полюса, а параллели будут изображены в виде концентрических окружностей (рис. 5.11).

Прямые и окружности – простые линии. Поэтому такая картографическая сетка и будет являться нормальной для этой проекции.

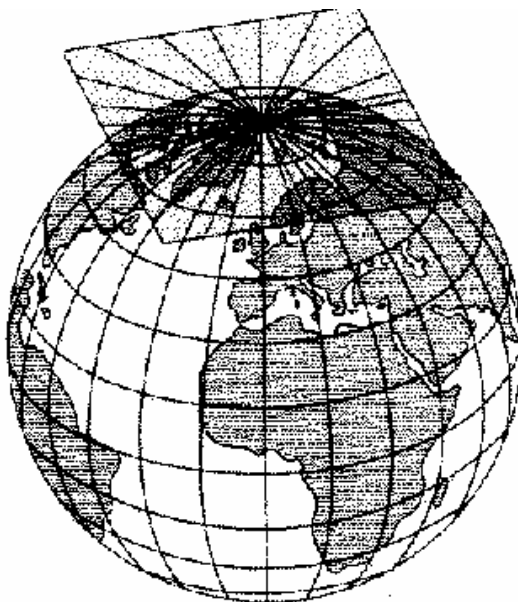


Рис. 5.11. Пример нормальной сетки

Но если экран приложить к глобусу не в точке полюса, а в какой-то другой, то, очевидно, что эти же самые меридианы и параллели глобуса приобретут на карте другой, более сложный вид. Для такой проекции обычные меридианы и параллели уже не будут являться нормальной сеткой.

Но и для этой проекции нормальная сетка существует. Если нарисовать на глобусе условные меридианы, сходящиеся в точке касания глобуса с картой, и пересекающие их параллели, то такая сетка косых сферических координат будет иметь на карте такой же простой вид, какой имели обычные меридианы и параллели в первом случае. Такая сетка на глобусе и будет нормальной для данной проекции.

Проекции классифицируют в зависимости от того, как выглядит нормальная сетка. Названия классов, как правило, включают в себя названия

вспомогательных поверхностей (цилиндра, конуса и т.д.), на которые как бы переносится поверхность сферы и которые затем разворачиваются в плоскость. Такое геометрическое представление проекции играет чисто иллюстративную роль, помогает наглядно представить ту или иную проекцию. Но на самом деле, как уже подчеркивалось, понятие проекции не подразумевает обязательных геометрических построений. И проекции классифицируются в зависимости от того, как *выглядят* меридианы и параллели нормальной сетки, а не от того какую форму имеет вспомогательная поверхность.

Существует множество классов проекций и рассмотрение подробной классификации заняло бы много места. Здесь будут рассмотрены только основные классы.

1. Цилиндрические проекции.

Меридианы изображаются параллельными прямыми линиями на одинаковых расстояниях друг от друга, пропорциональным их долготам. Параллели – параллельные прямые, перпендикулярные меридианам. Расстояния между параллелями могут быть различными в разных конкретных проекциях этого класса.

Наглядно представить построение таких проекций можно следующим образом (рис. 5.12).

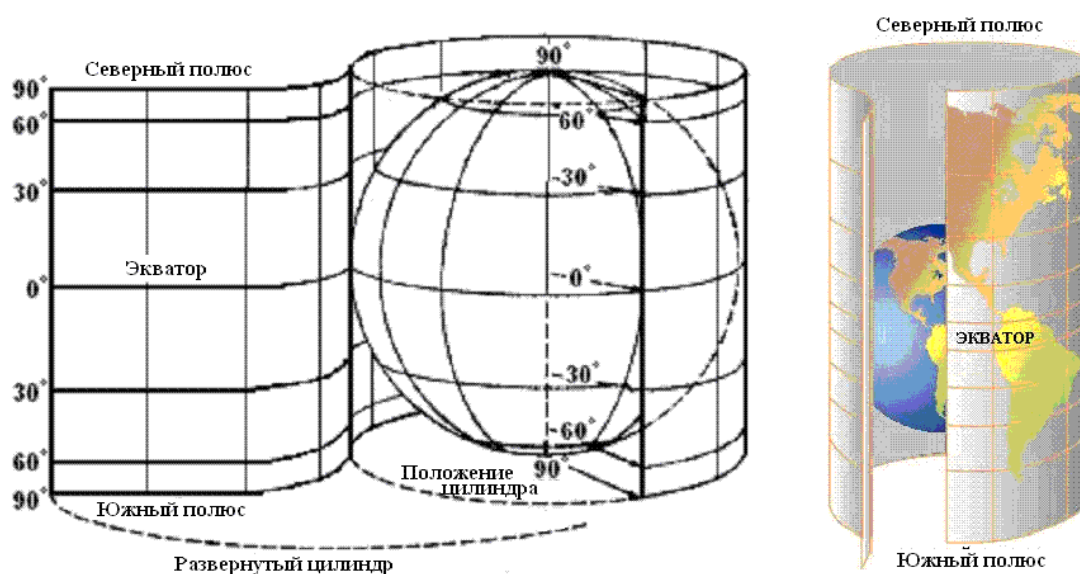


Рис. 5.12. Иллюстрация построения цилиндрических проекций

На глобус надевается цилиндр, касающийся глобуса, например, по экватору. Все точки глобуса тем или иным образом переносятся на цилиндр. Способ перенесения может быть разным в каждой конкретной проекции, на рис. 5.12 изображен только один из них. Затем цилиндр разрезается по своей образующей и разворачивается в плоскость (карту). Очевидно, что при

разворачивании цилиндра не происходит никаких искажений, сжатий, растяжений. В этом мог убедиться каждый, кому приходилось сворачивать в трубочку и разворачивать лист бумаги.

2. Азимутальные (перспективные) проекции.

В этих проекциях вспомогательной поверхностью является плоскость, то есть сама карта, на которую и проектируется глобус. Пример геометрической интерпретации азимутальной проекции (с лампочкой внутри глобуса) был уже приведен в начале данного параграфа.

Параллели нормальной сетки в азимутальных проекциях имеют вид концентрических окружностей, а меридианы - прямых линий, являющихся радиусами этих окружностей (рис. 5.13). Важно, что углы между меридианами на карте равны разностям их долгот.

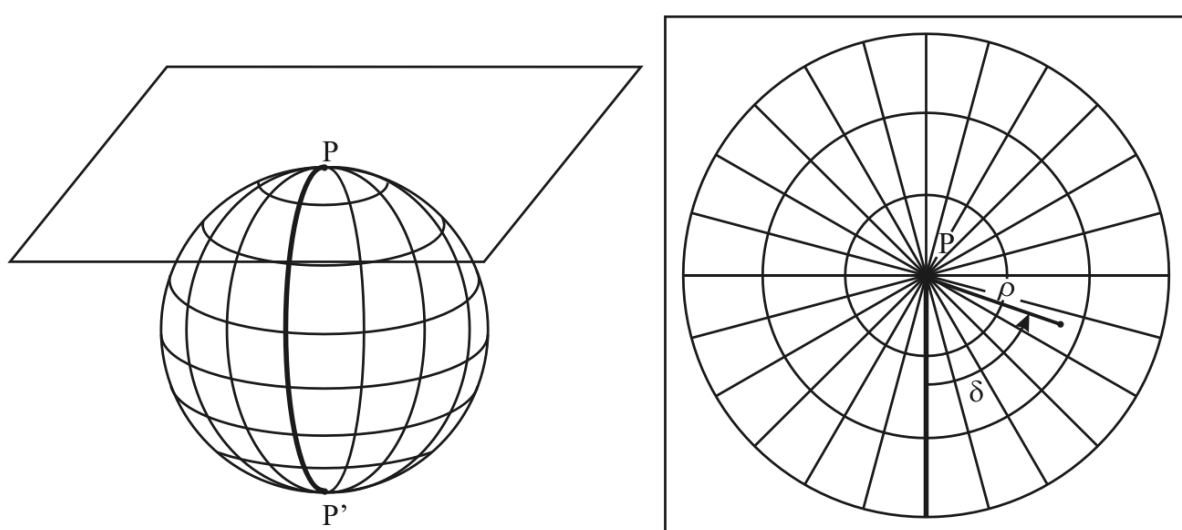


Рис. 5.13. Азимутальные проекции

3. Конические проекции

Конические проекции можно представить как результат проектирования сферы на конус, который надет на глобус. Разрезав конус по образующей, его также можно развернуть в плоскость без дополнительных искажений (искажения возникнут только при проектировании).

Картографическая сетка конических проекций похожа на сетку азимутальных. Но нетрудно представить, что «выкройка» конуса будет иметь вырезанный сектор, края которого представляют линию разреза (рис. 5.14).

Параллели имеют вид окружностей (с вырезанным сектором), а меридианы изображаются прямыми линиями, являющимися радиусами этих окружностей.

Важным отличием от азимутальной сетки (помимо выреза) является то, что углы между меридианами не равны, а только пропорциональны разностям долгот этих меридианов (обычно меньше их). Действительно, 360° вокруг полюса на глобусе изобразились на карте в виде меньшего угла (из-за

выреза), следовательно, углы между меридианами на карте меньше, чем на глобусе..

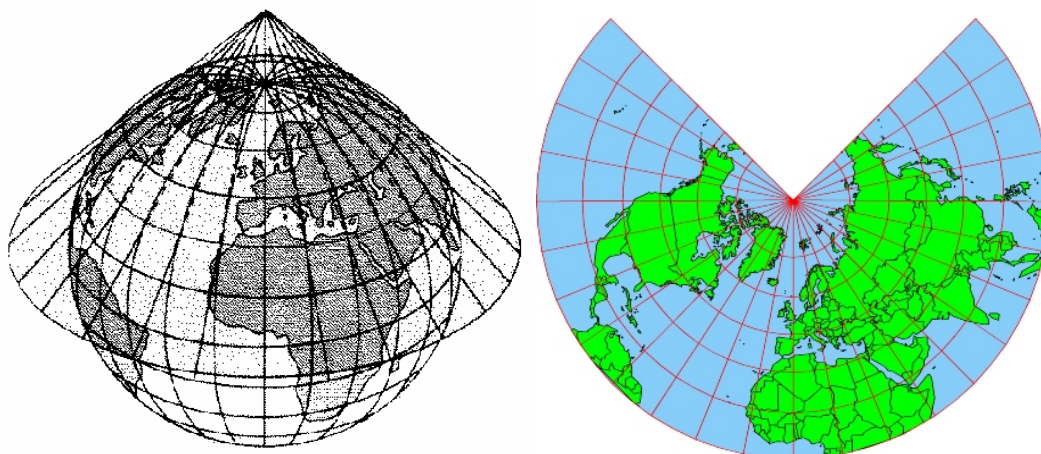


Рис. 5.14. Конические проекции

4. Прочие проекции.

Как уже отмечалось, видов проекций очень много, а рассмотренные выше цилиндрические, азимутальные и конические проекции являются как бы основными, «классическими» и самыми древними из проекций. Полная система классификации проекций по виду нормальной сетки является сложной и разветвленной, причем разные ученые предлагают разные системы классификации. Существуют проекции поликонические, псевдоконические, псевдоцилиндрические, круговые и т.д., и т.д. Некоторые из них будут рассмотрены ниже.

Мало того, некоторые из классов проекций являются частными случаями других. Даже рассмотренные выше цилиндрические и азимутальные проекции на самом деле являются частным случаем конических, что легко проиллюстрировать с помощью геометрических соображений. Действительно, если угол раствора конуса в конической проекции увеличить до 180° , то конус превратится в плоскость и получится азимутальная проекция. А если этот угол уменьшать в пределе до нуля, то вершина конуса будет удаляться в бесконечность и в пределе образующие конуса станут параллельными. Получится цилиндрическая проекция.

5.6. Другие виды классификации проекций

В картографии проекции классифицируют не только по характеру искажений и виду нормальной сетки, но и по другим признакам.

Из изложенного выше понятно, что часто проекцию можно геометрически представить как проектирование сферы на некоторую вспомогательную поверхность: цилиндр, конус, плоскость.

В зависимости от взаимного расположения земной оси и оси вспомогательной поверхности, проекции разделяются на:

- 1) *нормальные (прямые)*, когда ось поверхности параллельна оси Земли,
- 2) *поперечные*, когда эти оси перпендикулярны,
- 3) *косые*, когда оси расположены под произвольным углом.

Если вспомогательной поверхностью является плоскость (азимутальные проекции), то за ее ось принимается перпендикуляр к плоскости.

Название проекции получают комбинируя названия классов, к которым она принадлежит. Например, «равноугольная поперечная цилиндрическая проекция». На рис. 5.15 приведены примеры образования названий некоторых проекций (пунктиром обозначены оси вращения Земли и вспомогательной поверхности).

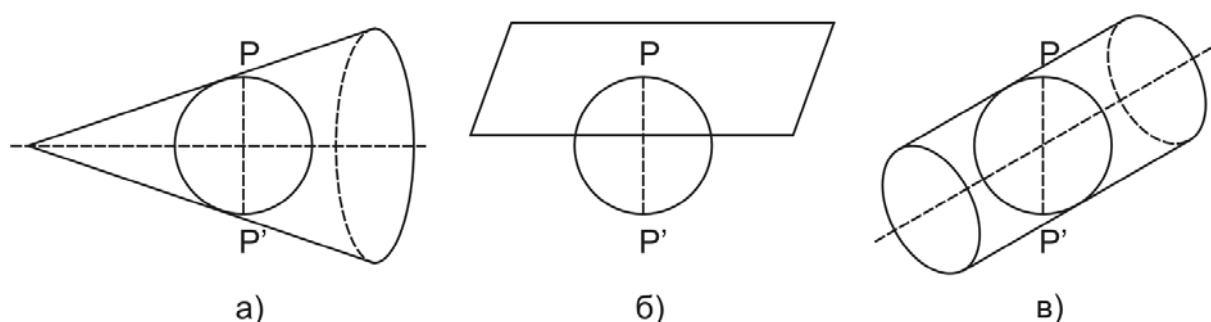


Рис. 5.15. Образование названий проекций: а) поперечная коническая, б) прямая азимутальная, в) косая цилиндрическая

Многогранными (многолистными) называются проекции, при построении которых на плоскость (цилиндр, конус) проектируется не вся земная сфера сразу, а ее часть. Другие части земной поверхности проектируются на вспомогательные поверхности, которые расположены по-другому по отношению к сфере. На картах в таких проекциях сплошное изображение получается только в пределах определенной части сферы (зоны), а карта всей поверхности Земли состоит из нескольких отдельных листов, склеить которые без промежутков между ними невозможно.

5.7. Общие свойства цилиндрических проекций

Как уже отмечалось, многие из проекций этого класса можно наглядно представить как результат проектирования глобуса на поверхность цилиндра, который затем разворачивается в плоскость. Для простоты и однозначности далее, если не оговорено иное, будем принимать глобус за сферу, но практически все выводы будут справедливы и для глобуса в форме эллипсоида.

Меридианы и параллели представляют собой перпендикулярные друг другу прямые, поэтому на плоскости (карте) для записи уравнений проекции удобно использовать прямоугольную декартову систему координат OXY . В картографии принято использовать левую прямоугольную систему координат. Ось OX направлена по северному направлению гринвичского меридиана (на карте – вверх), а OY – по экватору (на карте – вправо).

Общие уравнения цилиндрических проекций имеют вид

$$\begin{aligned}x &= f(\varphi), \\ y &= R \lambda.\end{aligned}$$

Здесь R – радиус сферы – глобуса, то есть Земли, уменьшенной с учетом главного масштаба.

Характерно, что x , как следует из первого уравнения, зависит только от широты φ , а y , как следует из второго уравнения, – только от долготы λ , причем пропорционален ей. В уравнениях проекций всегда подразумевается, что угловые величины (например, φ , λ) измеряются в радианах.

Второе уравнение одинаково для всех цилиндрических проекций, поэтому разные проекции различаются только видом функции f .

Главные направления на карте, то есть направления осей эллипса искажений, совпадают с направлениями меридианов и параллелей, следовательно, цилиндрические проекции являются ортогональными по отношению к нормальной сетке.

5.8. Проекция Уэтча

Цилиндрическая проекция Уэтча не обладает какими-либо свойствами, полезными для навигации, и не относится к разряду часто используемых. Но ее построение легко объяснить геометрически и мы рассмотрим ее здесь только для пояснения методики вывода уравнений проекции и исследования ее свойств.

Геометрически эту проекцию можно представить как проектирование сферы из ее центра на надетый на нее цилиндр (рис. 5.16).

Каждая точка M глобуса проектируется лучом из центра сферы O на поверхность цилиндра, где и получается ее изображение M' . Если в центре сферы поместить электрическую лампочку, то на цилиндрическом экране получится изображение меридианов и параллелей, соответствующее проекции Уэтча.

Из рисунка видно, что расстояние x , на котором M' находится от экватора на цилиндре (а, значит, и на карте) составляет $x = R \operatorname{tg} \varphi$. Это и будет первое уравнение данной проекции.

Второе уравнение должно отображать зависимость координаты y рассматриваемой точки от долготы. Эта координата равна расстоянию вдоль экватора от гринвичского меридиана до меридиана точки и равно $y = R\lambda$ (длина дуги равна радиусу окружности умноженному на центральный угол в радианах). Это расстояние не зависит от широты точки, то есть от того, в каком именно месте меридиана находится точка.

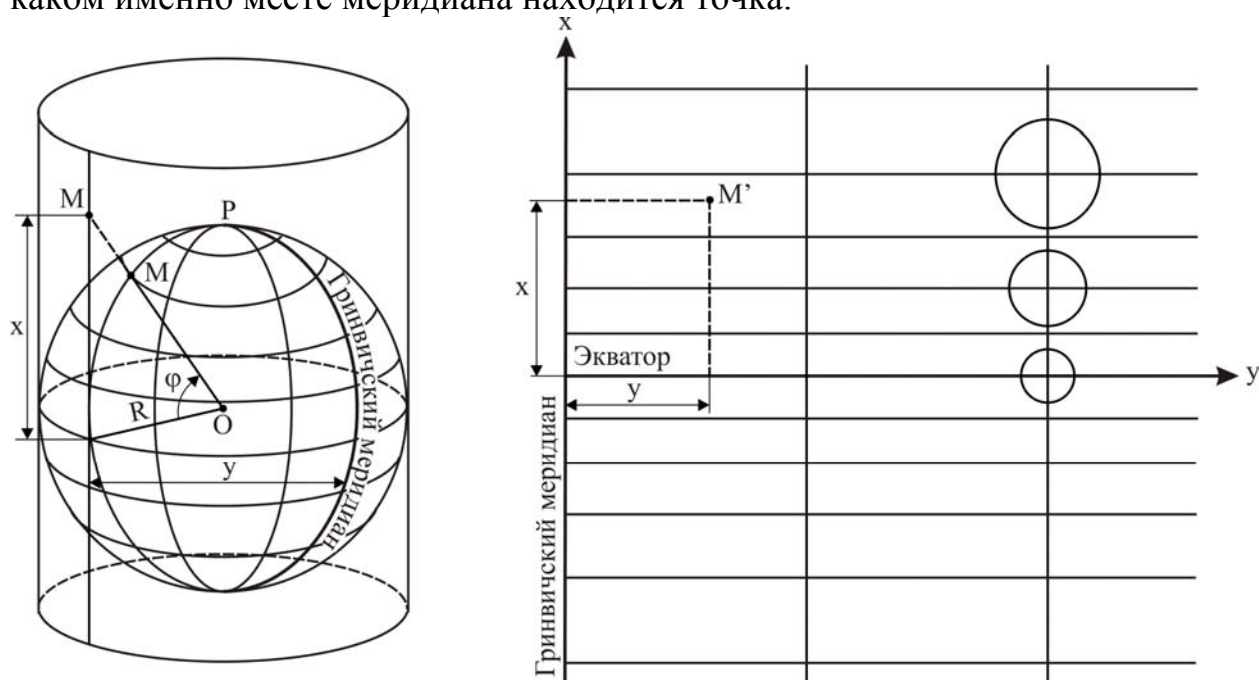


Рис. 5.16. Проекция Уэтча

Таким образом, уравнения проекции имеют вид

$$\begin{aligned} x &= R \operatorname{tg} \varphi, \\ y &= R\lambda. \end{aligned}$$

Мы воспользовались геометрическими построениями для записи этих уравнений, но на самом деле это лишь наглядная геометрическая иллюстрация. Можно было бы обойтись без нее, просто указав, что проекция задается такими уравнениями.

На сфере меридианы сближаются друг с другом по мере приближения к полюсам, но на полученной карте они, как и во всех цилиндрических проекциях, проходят на одинаковом расстоянии друг от друга, а именно на таком, на каком они находятся друг от друга на экваторе.

Из рис. 5.16 нетрудно видеть, что параллели (например, проведенные через каждые 10°) будут находиться на разном расстоянии друг от друга, поскольку тангенс широты не пропорционален самой широте. Эти расстояния будут все увеличиваться по мере удаления параллели от экватора. А полюс в такой проекции не отобразится вовсе, поскольку прямая, проведенная через центр сферы и полюс, не пересечет цилиндр, а пройдет по его оси. Впрочем, можно считать, что полюс будет все же изображен, но на *бесконечно* большом расстоянии от экватора (тангенс стремится к бесконечности, если широта стремится к 90°).

Чтобы исследовать свойства проекции Уэтча, найдем частные масштабы по меридиану m и по параллели n .

Частный масштаб по меридиану – это отношение бесконечно малого отрезка меридиана на карте к соответствующему ему бесконечно малому отрезку меридиана на глобусе. Соответственно, частный масштаб по параллели – это отношение бесконечно малого отрезка параллели на карте к соответствующему ему бесконечно малому отрезку параллели на глобусе.

$$m = \frac{dl_{\text{мер.кар}}}{dl_{\text{мер.гл}}}, \quad n = \frac{dl_{\text{пар.кар}}}{dl_{\text{пар.гл}}}.$$

Длину отрезка меридиана на сферическом глобусе найти нетрудно, поскольку меридиан является окружностью с радиусом, равным радиусу сферы (рис. 5.17).

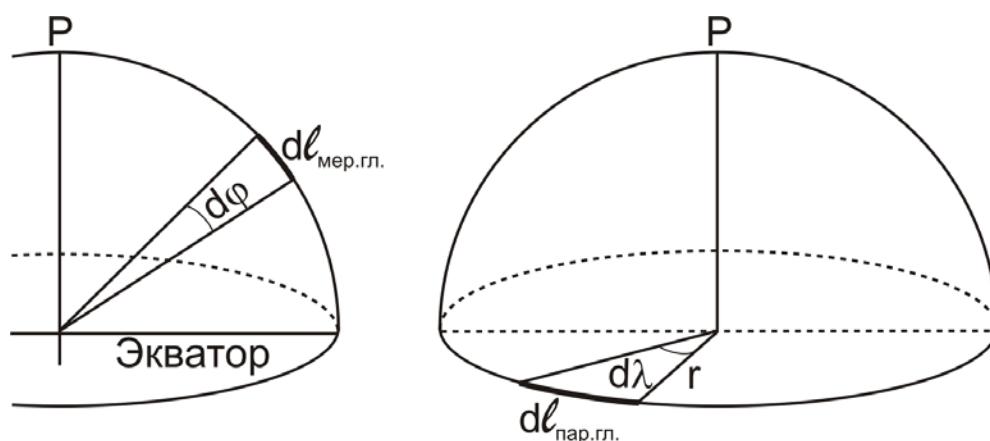


Рис. 5.17. К определению длины бесконечно малых отрезков меридиана и параллели на сфере

Приращению широты на бесконечно малую величину $d\varphi$ соответствует дуга меридиана $R d\varphi$ (предполагается, что $d\varphi$, как и все углы, измеряется в радианах). Параллель также является окружностью, но радиус ее $r=R\cos \varphi$. Бесконечно малому приращению долготы $d\lambda$ соответствует дуга параллели $R\cos \varphi d\lambda$.

Очевидно, что поскольку полученные выражения бесконечно малых дуг меридиана и параллели на сфере относятся к глобусу, а не к карте, то они могут быть использованы при анализе любых проекций.

Длины бесконечно малых отрезков меридиана и параллели на карте могут быть найдены путем дифференцирования уравнений проекции. Поскольку меридианы и параллели в цилиндрических проекциях направлены соответственно по осям OX и OY , то эти длины равны дифференциалам x и y .

$$dl_{\text{мер кар}} = dx = (R \operatorname{tg} \varphi)' d\varphi = \frac{R}{\cos^2 \varphi} d\varphi,$$

$$dl_{\text{пар кар}} = dy = (R \lambda)' d\lambda = R d\lambda.$$

Отсюда следует:

$$m = \frac{\frac{R}{\cos^2 \varphi} d\varphi}{R d\varphi} = \frac{1}{\cos^2 \varphi},$$

$$n = \frac{R d\lambda}{R \cos \varphi d\lambda} = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

Из полученных формул можно видеть, что оба частных масштаба зависят только от широты. На экваторе ($\varphi=0$, $\cos \varphi = 1$) получим $m=n=1$, то есть, нет никаких искажений. Это не удивительно, поскольку линия экватора принадлежит одновременно и глобусу, и цилиндру (карте) – это одна и та же линия. При проектировании она не растягивается и не сжимается, просто при разворачивании цилиндра превращается из окружности в прямую линию.

При возрастании широты оба масштаба увеличиваются, поскольку косинус становится меньше единицы. Это означает, что изображение на карте растягивается по сравнению с глобусом – чем дальше от экватора, тем сильнее. Но частный масштаб по меридиану растет быстрее, поскольку в формулу входит квадрат косинуса. Например, на широте $\varphi=60^\circ$, $\cos \varphi = 0,5$ и $m=4$, а $n=2$.

Поскольку m и n имеют геометрический смысл радиусов эллипса искажений по меридиану и параллели, понятно, что по мере удаления от экватора эллипс будет увеличиваться в размерах, растягиваясь по меридиану больше, чем по параллели (рис.5.16).

Вид карты мира в проекции Уэтча показан на рис 5.18.

Анализируя m и n , можно классифицировать проекцию Уэтча по характеру искажений.

Поскольку $m \neq n$, проекция не равноугольная.

Поскольку $m \neq 1$ и $n \neq 1$, проекция не равнопромежуточная.

Поскольку $mn = \frac{1}{\cos^3 \varphi} \neq 1$, проекция не равновеликая.

Следовательно, это проекция произвольная. Искажаются углы, расстояния, площади.

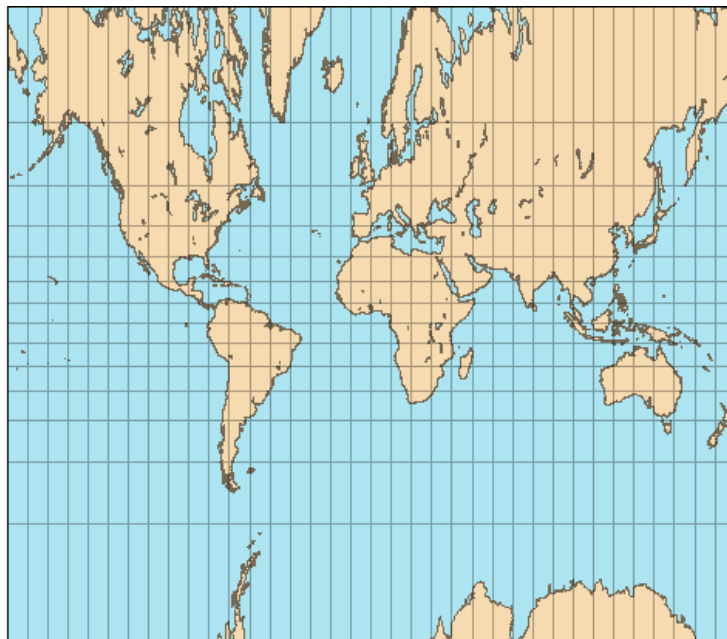


Рис. 5.18. Карта мира в проекции Уэтча

5.9. Простая (квадратная) цилиндрическая проекция.

Это одна из самых древних картографических проекций. Считается, что она была предложена в 1438 г. Генрихом Мореплавателем (Don Enrique o Navigator, 1394-1460). Это португальский принц, снаряжавший экспедиции для обследования атлантического побережья Африки и основавший мореходную школу.

Проекция называется простой, поскольку ее уравнения имеют простой вид, а построение проекции может быть легко проиллюстрировано геометрически.

Представим себе, что меридианы на глобусе представляют собой упругие металлические проволоочки, прикрепленные к глобусу на экваторе и скрепленные друг с другом в полюсах, а параллели – резинки, натянутые между меридианами. Если раскрепить в полюсах меридианы, то они распрямятся и лягут на поверхность цилиндра. Длина их при этом, конечно,

не изменится. А вот параллели-резинки растянутся, причем тем сильнее, чем дальше они от экватора. Полученная после распрямления цилиндра сетка и будет сеткой простой цилиндрической проекции.

«Металлические» меридианы не растягивались и не сжимались, а просто распрямились. Поэтому произвольная точка М, взятая на глобусе, попадет на цилиндр (а, значит, и на карту) в точку М', находящуюся на таком же расстоянии х от экватора, на каком от экватора была точка М на глобусе (рис. 5.20).



Рис. 5.19 . Генрих Мореплаватель

Расстояние любой точки на сфере от экватора равно $R\varphi$, поэтому уравнения проекции имеют вид

$$\begin{aligned}x &= R \varphi, \\y &= R \lambda.\end{aligned}$$

Найдем частные масштабы по меридиану и параллели, аналогично тому, как это было сделано при анализе проекции Уэтча.

$$m = \frac{dx}{R d\varphi}; \quad n = \frac{dy}{R \cos \varphi d\lambda}.$$

Из уравнений проекции

$$dx = (R \varphi)' d\varphi = R d\varphi,$$

$$dy = (R\lambda)' d\lambda = R d\lambda.$$

Подставив, получим:

$$m = \frac{R d\varphi}{R d\varphi} = 1, \quad n = \frac{R d\lambda}{R \cos \varphi d\lambda} = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

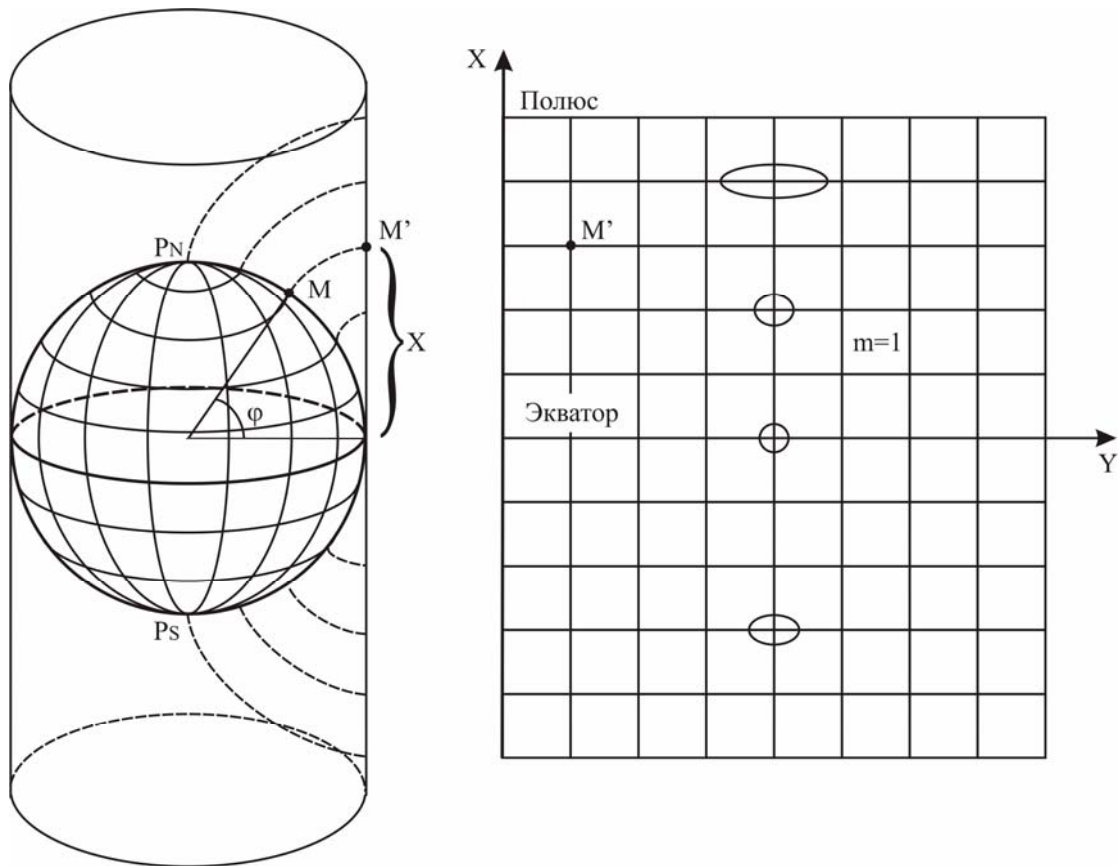


Рис. 5.20. Построение простой цилиндрической проекции

Поскольку $m=1$, проекция является *равнопромежуточной по меридиану*, что, впрочем, понятно и без всякой математики исходя из способа ее построения – расстояния вдоль меридиана на карте и глобусе совпадают.

Поскольку на глобусе параллели проходят на одинаковом расстоянии друг от друга, на таком же расстоянии они будут проходить и на карте. А поскольку один градус меридиана и экватора на сфере имеют одинаковую длину, то и расстояние между параллелями будет совпадать с расстоянием между меридианами. Картографическая сетка будет представлять собой квадратную решетку (если меридианы и параллели проводить через одинаковое количество градусов).

Меридианы сохраняют свою длину, но параллели растягиваются, причем тем сильнее, чем дальше они проходят от экватора. Об этом свидетельствует и частный масштаб по параллели n . Например, на широте

60° параллель будет растянута в два раза. А полюс, который на глобусе является *точкой*, на карте изображается *линией* такой же длины, как экватор, то есть растягивается в бесконечной степени.

Эллипс искажений имеет постоянный радиус по меридиану, а по параллели – увеличивающийся по мере приближения к полюсам.

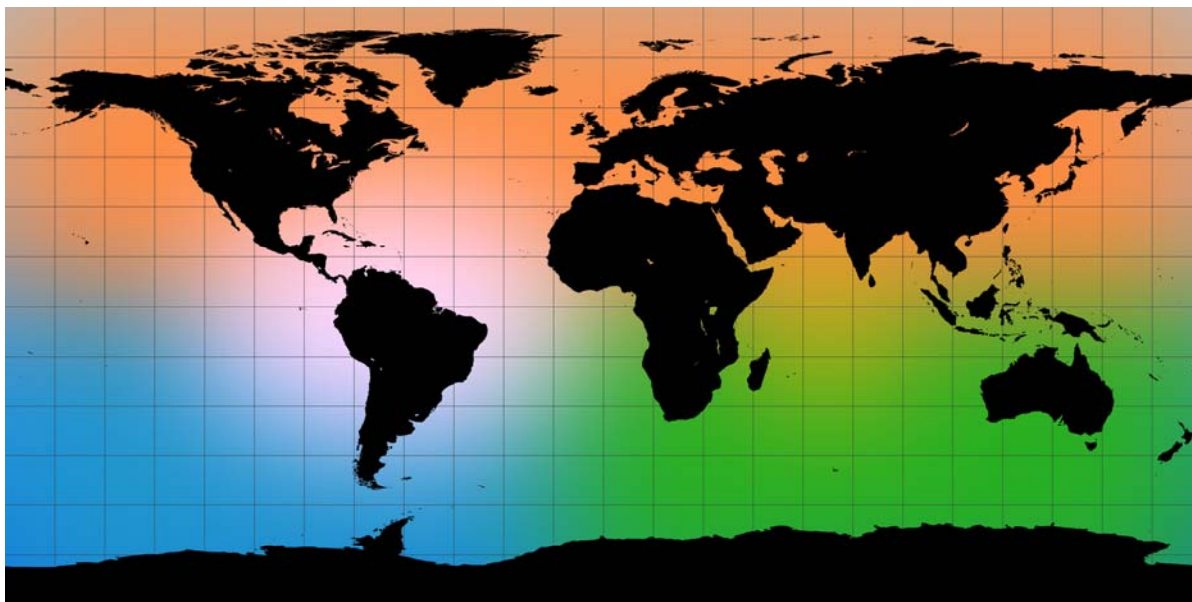


Рис. 5.21. Карта мира в простой цилиндрической проекции

Очевидно, что на такой карте все географические объекты оказываются растянутыми с запада на восток и, чем дальше от экватора, тем сильнее (рис.5.21). Проекция не является равноугольной и равновеликой и не находит применения в навигации. Иногда она используется для составления карт, на которых не предполагается выполнять какие-либо измерения – справочных (например, карта часовых поясов), рекламных и т.п.

Простая равноугольная проекция рассмотрена здесь потому, что на ее основе строится другая проекция, широко используемая в навигации.

5.10. Равноугольная цилиндрическая проекция (проекция Меркатора)

Эта проекция получила широкое распространение благодаря Герарду Меркатору (Gerhardus Mercator, 1512-1594), родившемуся во Фландрии на территории нынешней Бельгии (рис. 5.22). Настоящая его фамилия Кремер, а Меркатор – по сути, перевод фамилии на латинский язык. И то, и другое означает «торговец».

Построение проекции Меркатора легко объяснить, опираясь на рассмотренную выше простую цилиндрическую проекцию. Ее

существенным недостатком для навигации является **неравноугольность**, которая является следствием того, что $m \neq n$. А именно:

$$m = 1; \quad n = \frac{1}{\cos \varphi}.$$



Рис. 5.22. Меркатор.

Меридианы сохраняют свою длину, а параллели растягиваются. Чтобы проекция была равноугольной, необходимо построить такую проекцию, чтобы частные масштабы по меридиану и параллели были равны друг другу. Пытаться создать проекцию, в которой оба масштаба были равны единице, бесполезно – это соответствовало бы отображению сферы на глобус вообще без искажений, что невозможно. Но можно создать проекцию, в которой оба масштаба равны

$$m = n = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

Геометрически это означает, что для обеспечения равноугольности проекции *меридианы растягивают в той же степени, в какой растянуты параллели на данной широте*. С помощью рисунка объяснить построение такой проекции трудно, но в этом и нет необходимости. Ведь картографическая проекция – это не рисунки, а уравнения, формулы. А нужные формулы можно получить математическим путем.

Действительно, для любой цилиндрической проекции

$$m = \frac{dx}{Rd\varphi}.$$

Приравняв это выражение требуемой величине частного масштаба, получим

$$\frac{dx}{Rd\varphi} = \frac{1}{\cos \varphi},$$

откуда

$$dx = \frac{R}{\cos \varphi} d\varphi.$$

Это выражение показывает, как должны быть связаны между собой бесконечно малое приращение широты $d\varphi$ и расстояние вдоль меридиана на карте dx , чтобы проекция была равноугольной.

Для того, чтобы перейти от бесконечно малых величин к конечным, проинтегрируем обе части данного выражения.

$$\int dx = \int \frac{R}{\cos \varphi} d\varphi.$$

Из математики известно, что

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right),$$

тогда

$$x = R \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$y = R\lambda.$$

Это и будут уравнения проекции Меркатора. Анализировать ее свойства нет необходимости, ведь она изначально была построена нами как равноугольная:

$$m = n = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

Как и во всех равноугольных проекциях, эллипс искажений имеет форму окружности. Радиус ее увеличивается по мере удаления от экватора (рис. 5.23).

Расстояние между параллелями на карте увеличивается по мере удаления от экватора, а полюс изображается в виде прямой линии на

бесконечном расстоянии от экватора, то есть реально ни на какой карте изображен быть не может.

Теперь географические объекты растягиваются не только по параллели, как было в простой цилиндрической проекции, но и в такой же степени по меридиану. Поэтому в полярных районах острова и материи выглядят намного больше, чем на самом деле. На карте рис. 5.24 Гренландия выглядит крупнее Австралии, хотя на земной сфере она по площади примерно в 3,5 раза меньше.

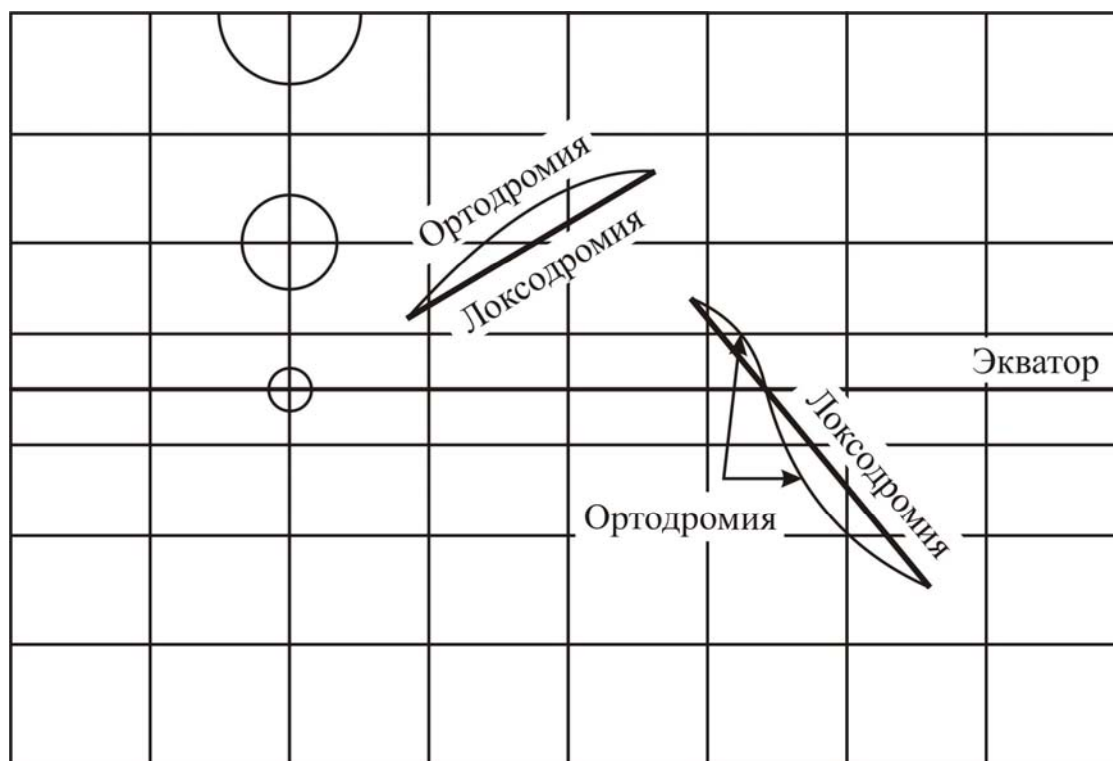


Рис. 5.23. Эллипс искажений, локсодромия и ортодромия в проекции Меркатора

Характерным свойством меркаторской проекции является то, что в ней *локсодромия изображается прямой линией*. Убедиться в этом можно и без математического доказательства на основе следующих рассуждений. Локсодромия на сфере пересекает меридианы под одинаковым углом, а проекция Меркатора равноугольная. Следовательно, под таким же постоянным углом локсодромия будет пересекать меридианы и на карте. Но меридианы на карте имеют вид параллельных прямых линий. Очевидно, что только прямая линия пересекает семейство параллельных прямых под постоянным углом.

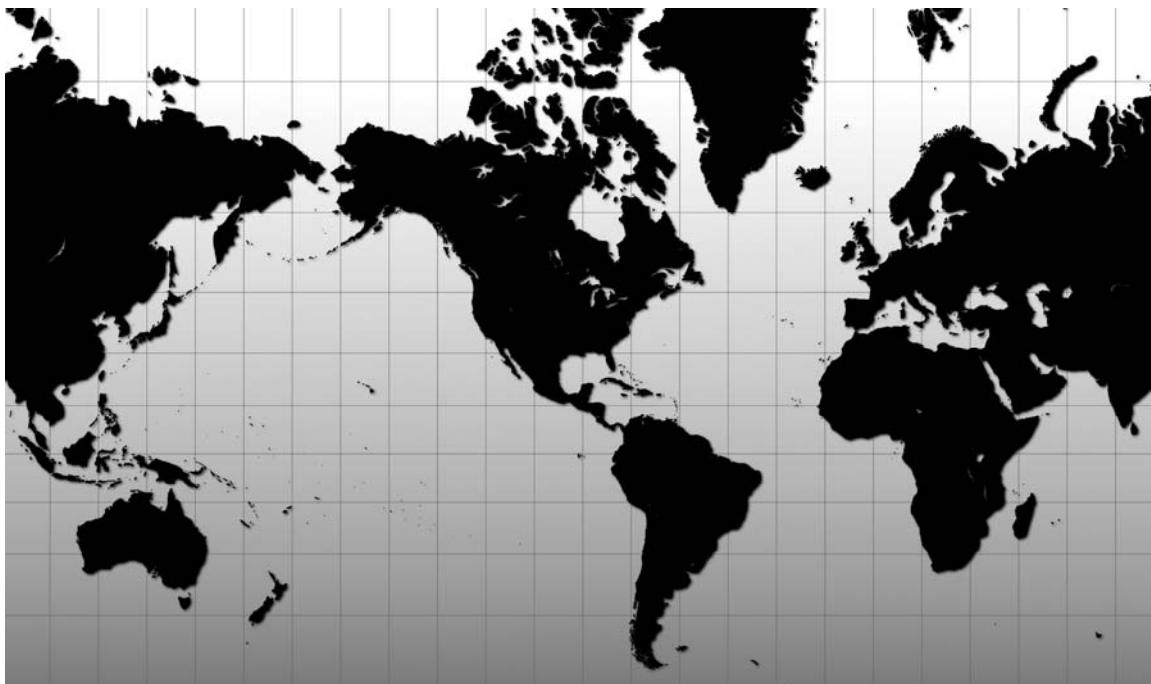


Рис. 5.24. Карта мира в проекции Меркатора.

Благодаря этому свойству, а также равноугольности, проекция Меркатора с древности и по настоящее время используется для издания морских карт. Штурману достаточно провести по линейке локсодромию, измерить транспортиром ее направление и можно выполнять плавание, выдерживая измеренный курс (с учетом магнитного склонения) по магнитному компасу.

Определенным недостатком проекции является невозможность точного измерения расстояний линейкой, поскольку частный масштаб изменяется с широтой. В одном конце измеряемого отрезка масштаб один, а в другом конце другой.

Для измерения расстояний на карте поступают следующим образом. Фиксируют измеряемый отрезок ножками циркуля и переносят его на левый или правый обрез карты так, чтобы середины исходного и перенесенного отрезков были на одной параллели. Расстояние отсчитывают по специальной неравномерной шкале на обрезе карты или просто по минутным делениям градусной сетки с учетом того, что одна минута по меридиану соответствует одной морской миле.

Для навигации, конечно, не используются карты, охватывающие на одном листе всю территорию земного шара – они оказались бы слишком мелкого масштаба. Если морская карта достаточно крупного масштаба и, следовательно, лист карты охватывает небольшой район, то масштаб в пределах листа можно считать примерно постоянным, пренебрегая небольшим его изменением от южного обреза к северному. В этом случае на карте публикуют не главный масштаб (степень уменьшения Земли до размера глобуса), а главный масштаб с учетом частного масштаба, то есть их

произведение, в среднем для всей карты или для какой-либо проходящей через нее параллели. Например, если $M 1:2\,000\,000$, а изображается район вблизи параллели 60° , на которой $m=n=2$, то на карте будет указано « $M 1:1\,000\,000$ для параллели 60° ».

Поскольку локсодромия изображается прямой, то ортодромия, конечно, выглядит изогнутой линией. На сфере ортодромия всегда проходит ближе к полюсу, чем локсодромия, поэтому и на карте они будут расположены так же. Ортодромия всегда выгнута в сторону большего масштаба, то есть в сторону полюсов (рис. 5.23).

Рассмотрим количественно, как изменяется частный масштаб с возрастанием широты. В табл. 5.1 приведены значения частных масштабов длин (m и n) и масштаба площадей P для некоторых широт.

Таблица 5.1

Частные масштабы в проекции Меркатора

Широта, φ	Частный масштаб длин, m, n	Частный масштаб площадей, $P=mn$
0°	1	1
1°	1,00015	1,0003
3°	1,0014	1,0027
10°	1,015	1,031
30°	1,155	1,33
60°	2	4
80°	5,759	33,16
89°	57,3	3283

Из таблицы видно, что на экваторе искажения вообще отсутствуют. Это не удивительно, поскольку цилиндр касается сферы именно по экватору. Но и в достаточно широкой полосе вдоль экватора искажения очень малы и практически незаметны при измерении расстояний линейкой. Так, на широте 3° при измерении расстояния в 100 км погрешность составит 140 м, что составляет доли миллиметра на картах наиболее распространенных в навигации масштабов.

Следовательно, в полосе вдоль экватора проекция является не только равноугольной, но и как бы практически равнопромежуточной по всем направлениям – можно непосредственно измерять и углы, и расстояния. По этой причине компания «Джеппесен» (Jeppesen) выпускает в проекции Меркатора авиационные маршрутные карты для районов, расположенных вблизи экватора.

В высоких же широтах искажения резко возрастают. Так, на широте 80° . как следует из таблицы, расстояния увеличиваются почти в 6 раз, а площади – более, чем в 30 раз.

5.11. Проекция Гаусса – Крюгера

Полное название этой проекции - равноугольная поперечная многолиственная цилиндрическая проекция эллипсоида. Предложена великим немецким математиком Карлом Гауссом в 1825 г. Рабочие формулы для нее получил немецкий геодезист Л.Крюгер.

В этой проекции составляются карты масштаба 1:500000 («пятикилометровки») и более крупного масштаба (топографические карты).

Как было показано выше, в традиционной проекции Меркатора с наименьшими искажениями изображается полоса вблизи экватора, поскольку цилиндр касается глобуса именно по экватору. Но если надеть цилиндр на глобус в поперечном направлении, чтобы ось цилиндра была перпендикулярной оси вращения Земли, то лучше всего будет изображена полоса вблизи меридиана, по которому цилиндр касается глобуса.

По своей математической идее проекция Гаусса-Крюгера является «положенной на бок» проекцией Меркатора. Правда, Меркатор занимался проектированием сферы, а здесь идет речь об эллипсоиде.

Геометрически эту проекцию можно представить следующим образом (рис.5.25).

На эллиптический цилиндр, касающийся глобуса по заданному меридиану, проектируется узкая полоса (зона) шириной 6° по долготе ($\pm 3^\circ$ от среднего меридиана зоны).

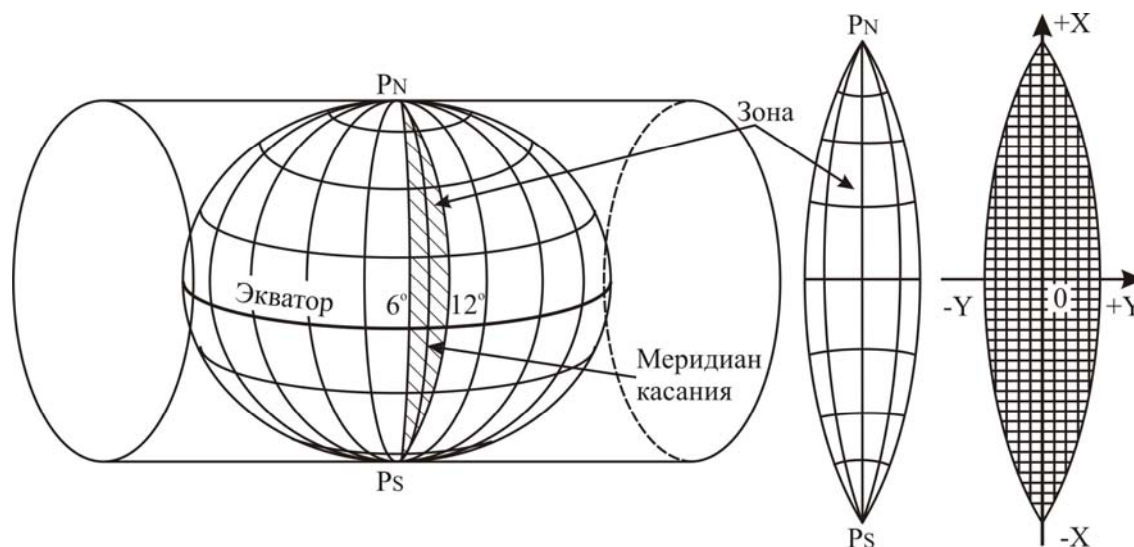


Рис. 5.25. К построению проекции Гаусса-Крюгера

Для проектирования следующей зоны цилиндр поворачивается на 6° вокруг оси вращения Земли. Таким образом, каждая зона проектируется на свой цилиндр. Всего получается 60 зон, нумеруемых к востоку от Гринвичского меридиана, который является западной границей первой зоны. Зоны распрямляются в плоскость, образуя как бы «лепестки».

Средний меридиан каждой зоны с номером N имеет долготу

$$\lambda^\circ_{\text{ср}} = 6 N - 3.$$

По этой формуле долгота получается в диапазоне от 0° до 360° , но ее нетрудно перевести и в обычный диапазон (от -180° до $+180^\circ$).

Способ проектирования каждой зоны на цилиндр аналогичен проекции Меркатора. Если бы на глобусе была изображена сетка условных меридианов и параллелей, в которой полюса лежали бы в точках пересечения глобуса с осью цилиндра, а условный экватор совпадал бы с меридианом касания, то такая сетка изобразилась бы точно так же как в классической проекции Меркатора. Условные меридианы и параллели выглядели бы прямыми линиями и меридианы были бы растянуты в той же степени, в какой растянуты условные параллели на данной условной широте.

Но настоящие меридианы и параллели в проекции Гаусса-Крюгера будут, конечно, иметь другой вид, поскольку сетка обычных меридианов и параллелей для этой проекции не является нормальной. В каждой зоне средний меридиан изображается в натуральную величину. Экватор – несколько вытянутая прямая. Другие меридианы и параллели – сложные кривые малой кривизны (изображены в первой зоне на рис.5.25).

Проекция, как и меркаторская, является равноугольной. Но благодаря тому, что на цилиндр проектируется только узкая полоса (не далее 3° от среднего меридиана зоны, являющегося условным экватором), искажения расстояний также очень малы (см. табл. 5.1). Максимальное искажение расстояний имеет место на экваторе на границе зоны, где $m = n = 1,00137$. Это означает, что погрешность может составить максимум 137 м на 100 км расстояния. Учитывая же, что в этой проекции издаются крупномасштабные карты, охватывающие территорию намного меньше 100 км, абсолютная величина погрешности при измерении расстояний не превышает несколько метров. Обычно это составляет доли миллиметра на карте. Следовательно, на таких картах можно точно измерять углы и практически точно – расстояния, то есть такую карту можно считать планом.

Платить за такую высокую точность приходится тем, что всю земную поверхность невозможно изобразить на одном листе карты. Изображение является непрерывным только в пределах одной зоны.

Характерной особенностью карт этой проекции является то, что вместо сетки меридианов и параллелей на них наносится сетка прямоугольных координат $x; y$. Исключением является карта масштаба 1:500000, которая

может издаваться в этой проекции, но на ней наносится обычная картографическая сетка.

Начало системы координат располагается в точке пересечения экватора со средним меридианом зоны. Ось OX направлена по среднему меридиану на север, а ось OY – по экватору на восток.

Горизонтальные линии на карте параллельны экватору (оси OY), а вертикальные – среднему меридиану зоны (оси OX). Координаты x, y измеряются в километрах. Можно считать, что значения x соответствуют расстоянию точки от экватора по поверхности эллипсоида (абсолютно точным это является только для точек на среднем меридиане).

Оцифровка координаты y на карте имеет несколько более сложную структуру. Если бы координата y измерялась как в обычной прямоугольной системе, то, очевидно, она могла бы иметь как положительное значение (если точка к востоку от среднего меридиана зоны), так и отрицательное (если к западу). Поскольку иметь дело с отрицательными координатами не очень удобно, чисто условно добавляют ко всем значениям y (положительным и отрицательным) постоянное число 500 км. В этом случае все координаты становятся положительными – ведь точка зоны с наибольшей отрицательной координатой (на пересечении экватора и западной границы зоны) имеет y примерно -333,6 км (3° вдоль экватора по 111,2 км каждый). После добавления 500 км будет $y \approx +166,4$ км.

Кроме того, одинаковое значение y будет иметь место у точек в разных зонах, поскольку каждое из них отсчитывается от своего среднего меридиана зоны. Чтобы различать зоны, к значению координаты y слева просто приписывается номер зоны.

Таким образом, полный формат координаты y включает в себя номер зоны (первые одна-две цифры) и увеличенное на 500 км расстояние точки от среднего меридиана зоны (последние три цифры).

Например, $x = 1347$, $y = 25465$.

По значению координаты x понятно, что точка находится на расстоянии 1347 км к северу от экватора. Номер зоны $N=25$, а долгота ее среднего меридиана

$$\lambda_{\text{ср}} = 6N - 3 = 150 - 3 = 147^\circ.$$

Рассматриваемая точка находится от среднего меридиана зоны на расстоянии $465 - 500 = -35$ км, то есть, на 35 км к западу.

На листе крупномасштабной карты уместается лишь небольшая часть «лепестка» зоны, но координатные линии (так называемая километровая сетка) проведены параллельно и перпендикулярно среднему меридиану зоны, даже если сам он находится за пределами данного листа. Поскольку края (обрезы) листа карты совпадают с меридианами и параллелями, линии километровой сетки им не параллельны и вовсе не направлены с севера на юг и с запада на восток.

Оцифровка сетки приведена на обрезах карты – на боковых обрезах оцифровка x , а на верхнем и нижнем – y . Поскольку первые цифры в

Приближенное преобразование координат может быть произведено по следующим формулам (если Землю принять за сферу):

$$\varphi^{\circ} \approx \frac{x}{111,2},$$

$$\lambda^{\circ} = \lambda_{cp} + \frac{y - 500}{111,2 * \cos \varphi}.$$

$$x \approx \varphi^{\circ} 111,2,$$

$$y = (\lambda^{\circ} - \lambda_{cp}) 111,2 \cos \varphi + 500.$$

В данных формулах широта измеряется в градусах, а прямоугольные координаты в километрах.

К полученному по данным формулам значению y следует *приписать* слева номер зоны.

Поскольку на картах в проекции Гаусса-Крбгера не нанесены меридианы, на них невозможно непосредственно измерять азимуты (пеленги, путевые углы и т.п.). Направления на топографических картах измеряют от северного направления вертикальной километровой линии, которое в общем случае не совпадает с направлением меридиана.

Угол, измеренный от северного направления километровой сетки. называется *дирекционным углом* (α). Он отличается от азимута A на величину, называемую *сближением меридианов* γ . Это угол между северным направлением меридиана и направлением вертикальной линии сетки (рис. 5.26). Если он известен, то легко по измеренному дирекционному углу определить азимут и наоборот.

$$A = \alpha + \gamma,$$

$$\alpha = A - \gamma.$$

Поскольку линии сетки параллельны среднему меридиану зоны, то очевидно, что сближение меридианов есть не что иное, как угол схождения меридиана данной точки и среднего меридиана зоны, следовательно

$$\gamma = (\lambda - \lambda_{cp}) \sin \varphi,$$

где φ , λ - широта и долгота точки,

λ_{cp} - долгота среднего меридиана зоны.

Как следует из формулы, сближение меридианов положительно, если точка расположена восточнее среднего меридиана. Поскольку долгота любой

точки в пределах зоны отличается от долготы среднего меридиана не более, чем на 3° , такое же максимальное значение может иметь и γ .

В пределах листа карты крупного масштаба, охватывающего небольшую территорию, сближение меридианов меняется незначительно и его среднее значение указывают на обрезе карты.

5.12. Косые цилиндрические проекции

На линии касания цилиндра и глобуса искажения отсутствуют, поскольку на цилиндре и глобусе это одна и та же линия. Но и в непосредственной близости от нее искажения очень малы. В классической проекции Меркатора этой линией является экватор, в проекции Гаусса-Крюгера – средний меридиан зоны. Очевидно, что надеть цилиндр на глобус можно любым образом, чтобы он касался любой заданной дуги большого круга (ортодромии). Вблизи такой ортодромии искажения будут практически отсутствовать.

Такие косые цилиндрические проекции иногда используются для издания специальных карт для конкретного маршрута, когда необходимо с минимальными искажениями изобразить область Земли вблизи линии заданного пути.

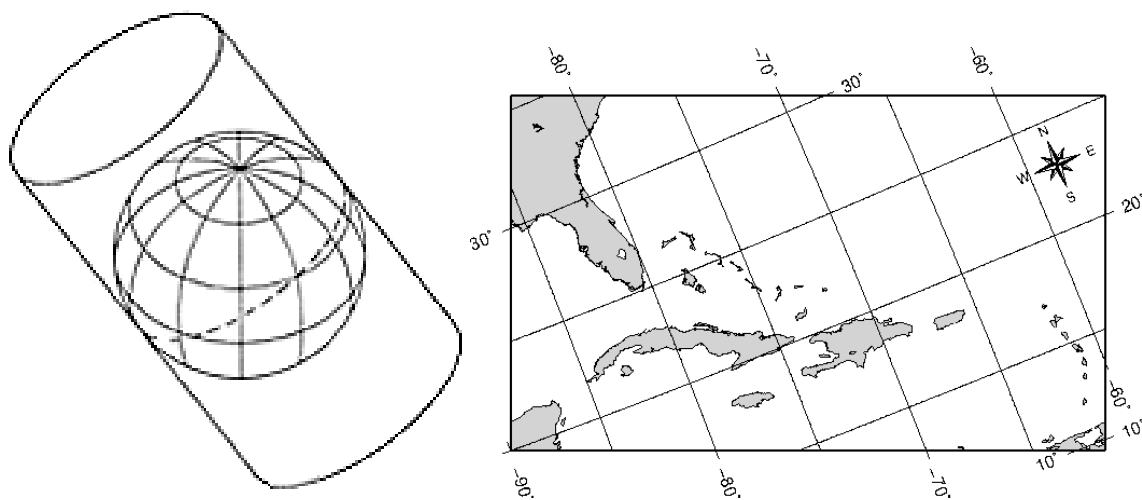


Рис. 5.27. Косая цилиндрическая проекция

Если, например, карта охватывает полосу ± 500 км от ортодромии касания (ЛЗП) и способ проектирования соответствует меркаторскому, то максимальные искажения расстояний не превысят 0,4% от самого расстояния, углы будут передаваться без искажений, локсодромия изображаться прямой линией. Но и ортодромия будет практически прямой, поскольку на ортодромии касания (условном экваторе) она будет иметь точку

перегиба. Это означает, что на такой карте можно измерять углы, расстояния, выполнять графические построения с помощью линейки.

Меридианы и параллели географической сетки на такой карте, строго говоря, будут иметь сложную форму, но также очень близкими к прямым

5.13. Общие сведения об азимутальных проекциях

В геометрической интерпретации азимутальных проекций вспомогательной поверхностью является плоскость, то есть сама карта. На эту плоскость тем или иным способом переносятся точки сферы. Часто этот способ переноса можно геометрически проиллюстрировать как проектирование лучами сферы на плоскость из какой либо точки.

Плоскость (карта) может касаться глобуса в какой-либо точке (проекции на касательную плоскость) или пересекать поверхность сферы (проекции на секущую плоскость).

В зависимости от расположения точки, из которой осуществляется проектирование, азимутальные проекции делятся на следующие виды (рис. 5.28).

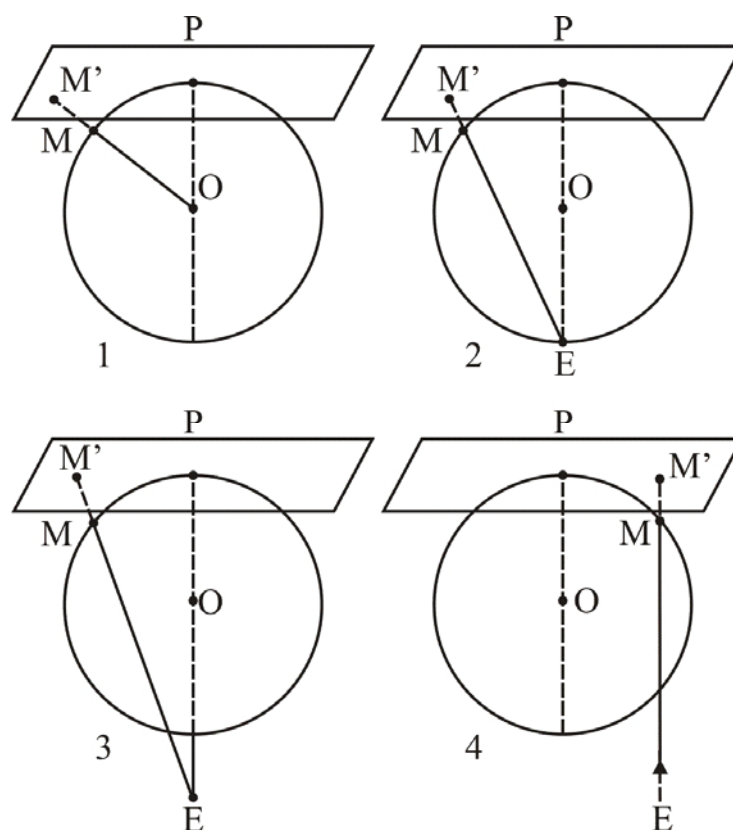


Рис. 5.28. Классификация азимутальных проекций:
а) центральная, б) стереографическая, в) ортографическая, г) внешняя

1) *Центральные проекции.* Проектирование осуществляется из центра сферы. Любая точка M на глобусе изобразится точкой M' на плоскости так, что M , M' и центр сферы O лежат на одной прямой.

2) *Стереографические проекции.* Проектирование осуществляется из точки сферы E , диаметрально противоположной точке касания.

3) *Внешние проекции.* Точка E , из которой осуществляется проектирование лежит вне сферы.

4) *Ортографические проекции.* Точки сферы проектируются на плоскость прямыми линиями, перпендикулярными к плоскости. Эти проекции можно рассматривать как предельный случай внешней проекции, когда точка E находится бесконечно далеко.

Во всех азимутальных проекциях нормальная картографическая сетка выглядит как показано на рис. 5.29 - меридианы являются радиальными прямыми, а параллели – концентрическими окружностями. Характер изменения расстояний между параллелями различен для каждой конкретной азимутальной проекции.

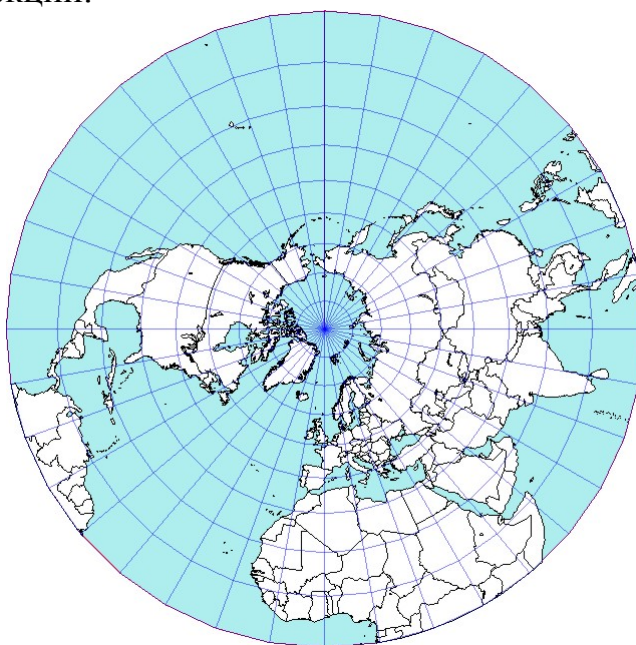


Рис. 5.29. Картографическая сетка азимутальной проекции

Исходя из вида нормальной сетки, уравнения проекций удобнее записывать не в прямоугольной (как для цилиндрических проекций), а в полярной системе координат. Началом этой системы является, как правило, изображение полюса на карте, а за направление начала отсчета выбирают направление изображения гринвичского меридиана. Тогда любая точка M' на карте может характеризоваться двумя координатами: расстоянием ρ от начала системы координат (полюса) до точки и углом δ между направлением начала отсчета и направлением на точку, как показано на рис 5.13.

Общие уравнения азимутальных проекций имеют вид

$$\begin{aligned}\rho &= f(\varphi), \\ \delta &= \lambda.\end{aligned}$$

Как следует из первого уравнения, координата ρ зависит только от широты, что и определяет круговую форму параллелей – все точки параллели имеют одинаковую широту и будут находиться от начала системы координат на одинаковом расстоянии ρ независимо от их долготы. В каждой конкретной проекции вид функции $f(\varphi)$ разный, поэтому расстояние между параллелями на карте может быть одинаковым, увеличиваться или уменьшаться по разным законам.

Второе уравнение одинаково для всех азимутальных проекций. Оно свидетельствует о том, что углы между меридианами на карте равны разностям долгот этих меридианов – на карте углы δ для точек на двух меридианах будут различаться на столько же, насколько различаются долготы λ этих точек. Разумеется, речь идет о меридианах и параллелях нормальной сетки. Если проекция является поперечной или косой, то сетка обычных географических меридианов и параллелей не будет нормальной и будет иметь более сложный вид (рис.5.30)

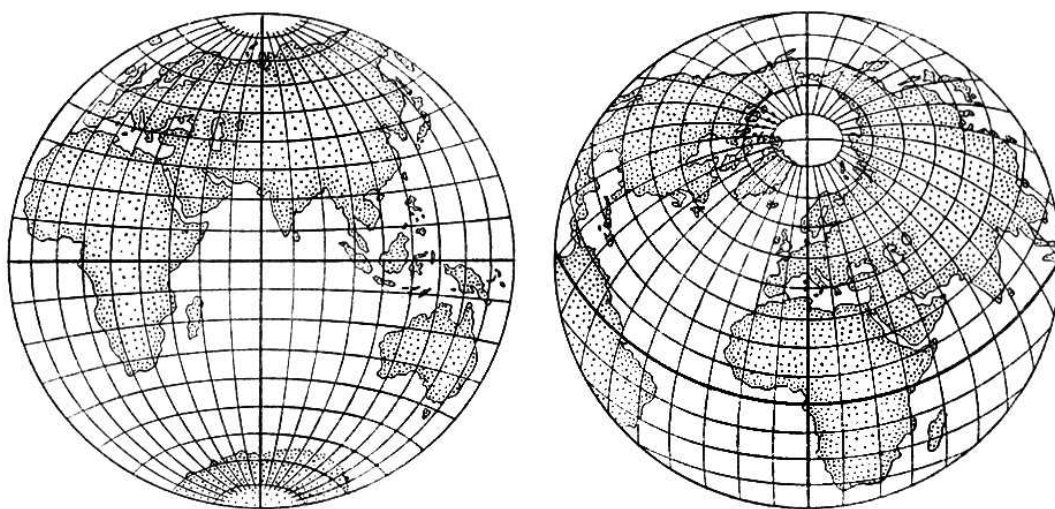


Рис. 5.30 . Меридианы и параллели в поперечной и косой азимутальных проекциях

Для навигации наибольшее значение имеют центральная полярная и стереографическая проекции.

5.14. Центральная полярная проекция

Плоскость касается глобуса в точке полюса, проектирование осуществляется из центра сферы.

Из рис.5.31 можно видеть, что для любой точки

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{\rho},$$

откуда

$$\rho = \frac{R}{\operatorname{tg} \varphi} = R \operatorname{ctg} \varphi.$$

Это и будет первым уравнением центральной полярной проекции. Второе уравнение получать нет необходимости – для всех азимутальных проекций оно одинаково:

$$\delta = \lambda.$$

Из первого уравнения можно видеть, что при равномерном увеличении широты величина ρ будет возрастать все быстрее, то есть расстояние между параллелями будет увеличиваться по мере удаления от полюса. Экватор в этой проекции не изображается, поскольку проектирующая прямая не пересечет плоскость. Но можно считать, что экватор изображается в виде окружности бесконечно большого радиуса.

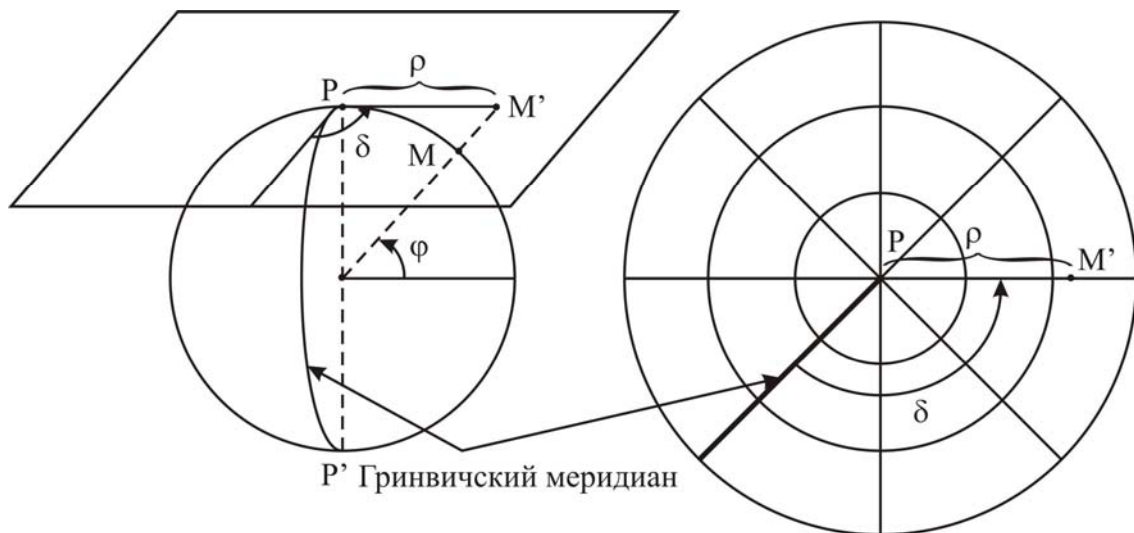


Рис. 5.31. К выводу уравнений центральной полярной проекции

Найдем частные масштабы по меридиану и параллели.

Как уже было показано ранее, бесконечно малый отрезок меридиана на глобусе имеет длину $Rd\varphi$. При изменении широты на величину $d\varphi$ точка на

карте сместится на величину $d\rho$ (это и будет длина соответствующего отрезка на карте), которую можно найти с помощью уравнения проекции. Для этого нужно производную правой части уравнения по широте умножить на дифференциал широты.

Частный масштаб по меридиану – это отношение двух данных отрезков.

$$m = \frac{d\rho}{Rd\varphi} = \frac{(R\operatorname{ctg}\varphi)'d\varphi}{Rd\varphi} = (\operatorname{ctg}\varphi)'.$$

Учитывая, что производная котангенса

$$(\operatorname{ctg}\varphi)' = -\frac{1}{\sin^2 \varphi},$$

получим

$$m = \frac{1}{\sin^2 \varphi} = \operatorname{cosec}^2 \varphi.$$

Знак минус, появившийся в выражении производной от ρ по φ , означает, что при возрастании широты φ величина ρ уменьшается. Поскольку здесь нас интересует отношение абсолютных длин двух отрезков, в выражении для частного масштаба знак минус опущен.

Найдем частный масштаб по параллели. На глобусе бесконечно малый отрезок параллели имеет длину $R\cos\varphi d\lambda$. На карте этот отрезок изображается дугой окружности радиуса ρ , ограниченной бесконечно малым центральным углом $d\delta$. Длина этой дуги $\rho d\delta$. Тогда, подставляя ρ из уравнения проекции и учитывая, что $d\delta = d\lambda$ (поскольку из второго уравнения проекции $\delta = \lambda$), получим

$$n = \frac{\rho d\delta}{R\cos\varphi d\lambda} = \frac{R\operatorname{ctg}\varphi d\lambda}{R\cos\varphi d\lambda} = \frac{1}{\sin\varphi} = \operatorname{cosec}\varphi.$$

Сопоставляя выражения для m и n , можно сделать вывод, что проекция не равноугольная ($m \neq n$), не равнопромежуточная ($m \neq 1$ и $n \neq 1$) и не равновеликая ($mn \neq 1$). Следовательно, проекция относится к произвольным и с точки зрения искажений не обладает какими-либо полезными свойствами.

Но центральная проекция все же имеет одну особенность, полезную для аэронавигационного обеспечения полетов. Она связана с тем, что проектирование всех точек осуществляется из центра сферы. Но и плоскость любой ортодромии на сфере тоже проходит через ее центр. Поэтому все линии, по которым проектируются на карту точки ортодромии, лежат в одной плоскости – плоскости самой ортодромии. Эта плоскость пересекается с плоскостью карты по прямой линии, которая и будет изображением этой

ортодромии. Следовательно, *любая ортодромия изображается на картах центральной проекции в виде прямой линии* (рис. 5.32).

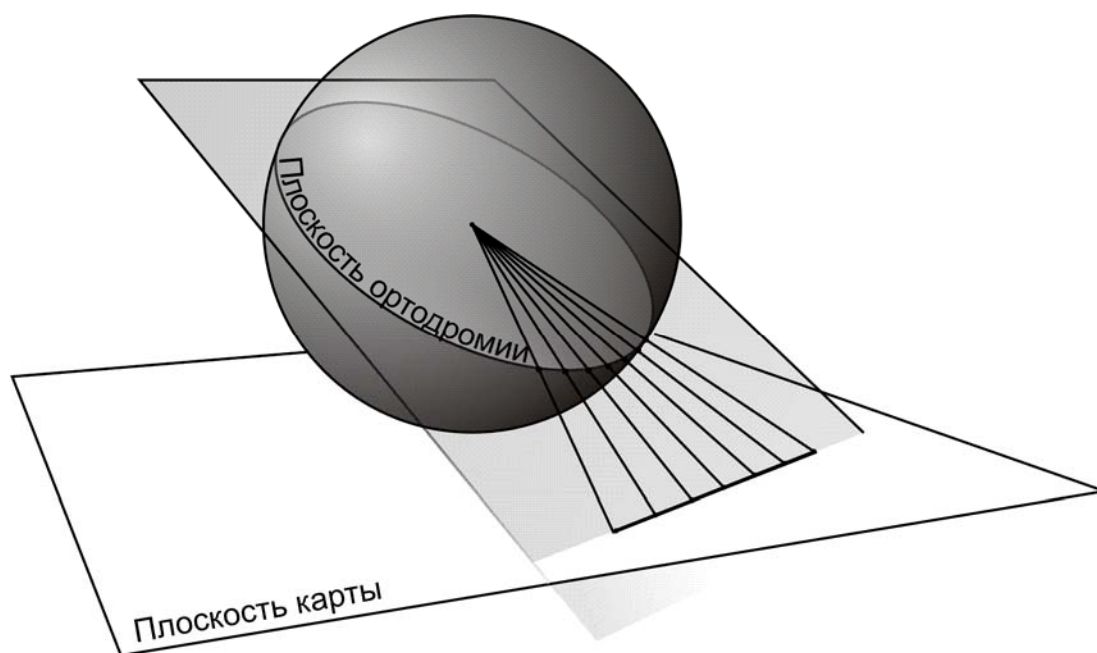


Рис. 5.32. К ортодромичности центральной проекции

Сетка меридианов и параллелей этой проекции называется *гномонической сеткой* и используется для графического определения промежуточных точек ортодромии (рис. 5.33). На бланке с такой сеткой наносят по координатам исходный и конечный пункты маршрута и соединяют их по линейке прямой линией. Это и будет изображение ортодромии. Задаваясь любыми значениями долгот промежуточных точек, находят широты точек пересечения ортодромии с соответствующими меридианами. По записанным широтам и долготам промежуточных точек наносят их на полетную карту и соединяют между собой.

На бланках с гномонической сеткой также нанесены пунктирные линии, все точки которых находятся на равных расстояниях от среднего меридиана картографической сетки. С их помощью можно определить и длину ортодромии.

Точность графического определения координат промежуточных точек и ее длины невысока, но такой способ не требует никаких расчетов.

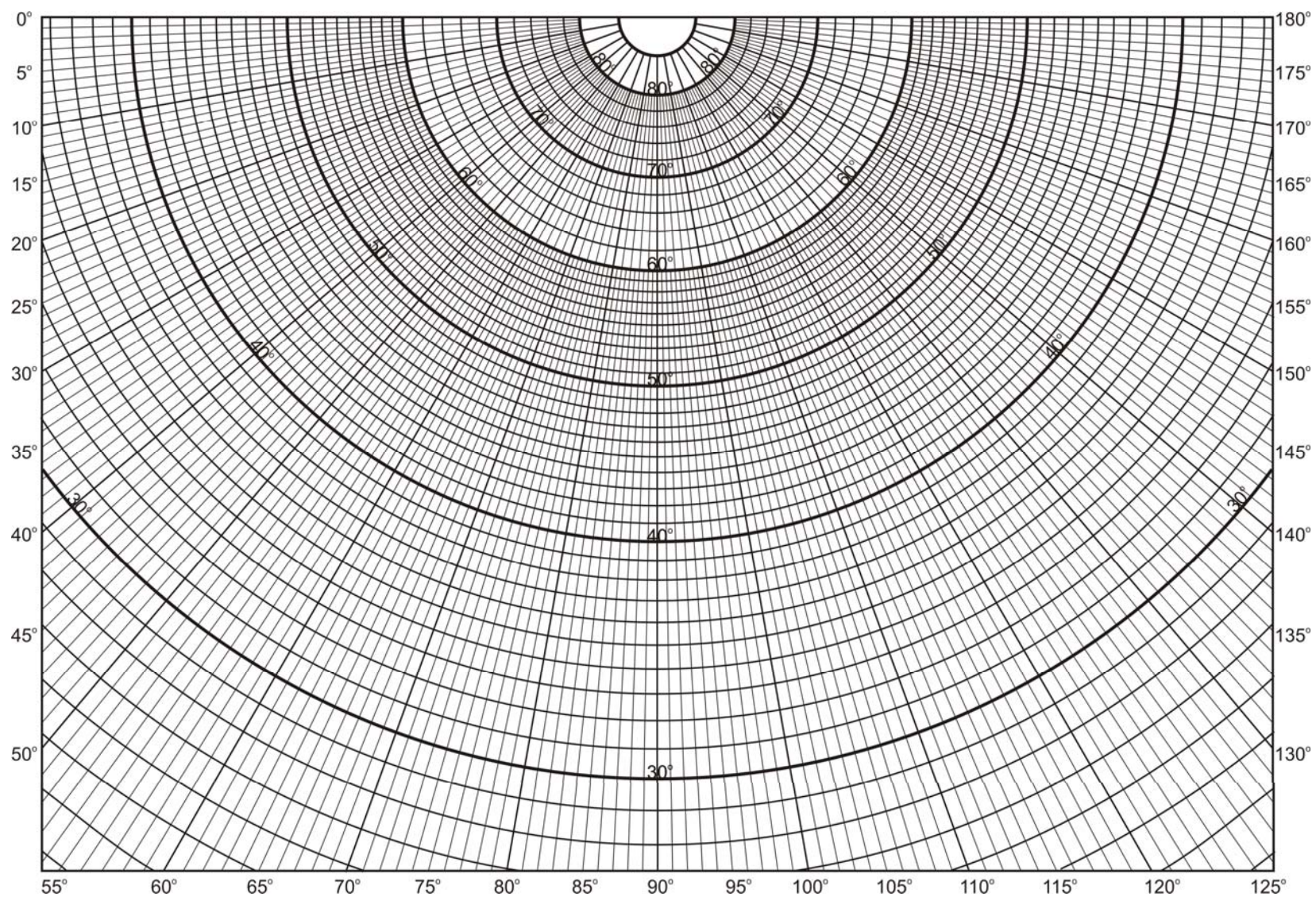


Рис.5.33. Гномоническая сетка

5.15. Стереографическая проекция

Если точки сферы проектируются на плоскость, касающуюся глобуса в какой-либо точке (например, в северном полюсе), из диаметрально противоположной ей точки глобуса (из южного полюса), то такую проекцию называют стереографической проекцией на касательную плоскость. Но плоскость может быть и секущей, то есть не касаться, а пересекать сферу по какой-либо параллели. Проекция на касательную плоскость является частным случаем проекции на секущую плоскость, поскольку полюс можно рассматривать как параллель нулевого радиуса с широтой 90° .

Получим уравнения стереографической проекции для общего случая, то есть на плоскость, секущую сферу по параллели с широтой φ_0 (рис. 5.34).

Для упрощения записи формул введем вместо широты φ вспомогательную переменную - полярное расстояние z , которое является дополнением широты до 90° :

$$z = 90^\circ - \varphi.$$

Пусть P - полюс, A - противоположный полюс, из которого осуществляется проектирование, C - точка на параллели сечения, а M - произвольная точка сферы с широтой φ (она проектируется на карту в точку M').

Северный полюс изобразится на карте в точке P' .

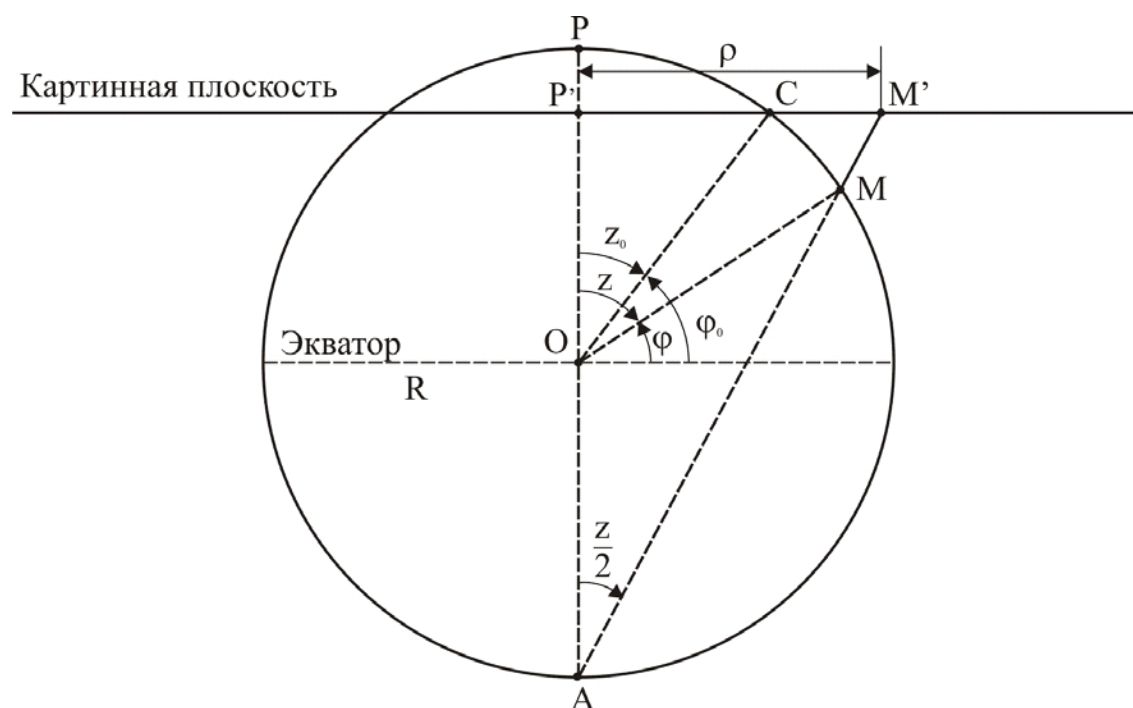


Рис. 5.34. К выводу уравнений стереографической проекции

Углы POC и POM будут являться полярными расстояниями z_0 и z соответственно точек C и M .

$$z_0 = 90^\circ - \varphi_0, \quad z = 90^\circ - \varphi.$$

Из элементарной геометрии известно, что все углы, вершины которых лежат на окружности и которые опираются на одну и ту же дугу этой окружности, равны половине центрального угла, опирающегося на эту дугу. Поэтому угол PAM равен половине угла POM .

Найдем величину ρ , то есть расстояние на карте от изображения полюса P' до изображения M' рассматриваемой точки. Из рисунка

$$\rho = P'M' = AP' \operatorname{tg} \frac{z}{2}.$$

Учитывая, что

$$AP' = AO + P'O,$$

где AO является радиусом R сферы, а из треугольника $OP'C$

$$P'O = R \cos z_0,$$

получим

$$P'M' = (R + R \cos z_0) \operatorname{tg} \frac{z}{2}.$$

Это и будет первое уравнение проекции. Учитывая, что второе уравнение одинаково во всех азимутальных проекциях, получим уравнения стереографической проекции

$$\rho = R(1 + \cos z_0) \operatorname{tg} \frac{z}{2},$$

$$\delta = \lambda.$$

Если вернуться от полярных расстояний z к широтам φ , эти же уравнения примут вид

$$\rho = R(1 + \sin \varphi_0) \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$\delta = \lambda.$$

Найдем частный масштаб по меридиану. На сфере длина бесконечно малой дуги меридиана $Rd\varphi=Rdz$, а на карте его длина равна дифференциалу $d\rho$, который можно найти, продифференцировав первое уравнение проекции.

$$m = \frac{d\rho}{Rdz} = \frac{R(1 + \cos z_0) \frac{1}{2} dz}{Rdz \cos^2 \frac{z}{2}} = \frac{1 + \cos z_0}{2 \cos^2 \frac{z}{2}}.$$

Учитывая, что по тригонометрическим формулам приведения

$$2 \cos^2 \frac{z}{2} = 1 + \cos z,$$

получим

$$m = \frac{1 + \cos z_0}{1 + \cos z} = \frac{1 + \sin \varphi_0}{1 + \sin \varphi}.$$

Здесь φ_0 - широта параллели сечения глобуса, являющаяся константой для конкретной проекции, а φ - широта любой точки

Найдем частный масштаб по параллели. Длина бесконечно малого отрезка параллели на сфере $R \cos \varphi d\lambda = R \sin z d\lambda$, а на карте $\rho d\delta$. Выражение для ρ возьмем из уравнения проекции. Учитывая, что $d\lambda = d\delta$, получим

$$n = \frac{\rho d\delta}{R \cos \varphi d\lambda} = \frac{\rho d\lambda}{R \sin z d\lambda} = \frac{R(1 + \cos z_0) \operatorname{tg} \frac{z}{2}}{R \sin z}.$$

Учитывая, что тангенс равен отношению синуса к косинусу, а

$$\sin z = 2 \sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2},$$

после сокращения R получим

$$n = \frac{(1 + \cos z_0) \sin \frac{z}{2}}{2 \sin \frac{z}{2} \cos^2 \frac{z}{2}} = \frac{1 + \cos z_0}{2 \cos^2 \frac{z}{2}}.$$

Заменяя знаменатель в соответствии с уже использовавшейся тригонометрической формулой, окончательно получим

$$n = \frac{1 + \cos z_0}{1 + \cos z} = \frac{1 + \sin \varphi_0}{1 + \sin \varphi}.$$

Это выражение полностью совпадает с выражением для частного масштаба по меридиану, то есть во всех точках карты $m=n$. Следовательно, *стереографическая проекция является равноугольной*.

Рассмотрим, как меняются частные масштабы при изменении широты точки. Очевидно, что на параллели сечения ($\varphi = \varphi_0$) масштаб равен 1. Южнее параллели сечения знаменатель в формуле для частных масштабов становится меньше числителя, следовательно, $m = n > 1$, изображение по сравнению с глобусом увеличивается. Севернее параллели сечения $m=n<1$, изображение сжимается.

Эллипс искажений, как и во всех равноугольных проекциях, имеет форму окружности. Радиус ее увеличивается или уменьшается по сравнению с кружком на глобусе в зависимости от расположения точки относительно параллели сечения.

Таким образом, наименьшие искажения имеют место вблизи параллели сечения.

В частном случае, когда проекция осуществляется на касательную плоскость ($\varphi_0 = 90^\circ$, $\sin \varphi_0 = 1$), уравнения проекции и масштабы будут иметь вид

$$\rho = 2R \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\delta = \lambda.$$

$$m = n = \frac{2}{1 + \cos z} = \frac{2}{1 + \sin \varphi}.$$

В этом случае лучше всего будет изображена область вблизи полюса (точки касания). На рис. 5.29 приведена карта в стереографической поверхности на касательную плоскость.

Стереографическая проекция обладает интересной особенностью. *Любая окружность на сфере изображается на картах в этой проекции также в виде окружности*. Ранее отмечалось, что в любых равноугольных проекциях *бесконечно малый кружок* изображается также в виде кружка. Но в данном случае речь идет об окружности *любого* радиуса. Например, круглое озеро диаметром 100 км будет изображено в виде окружности. Правда, центр и радиус окружности на карте не совпадут с центром и

радиусом окружности на сфере. Это свойство проиллюстрировано на рис. 5.35.

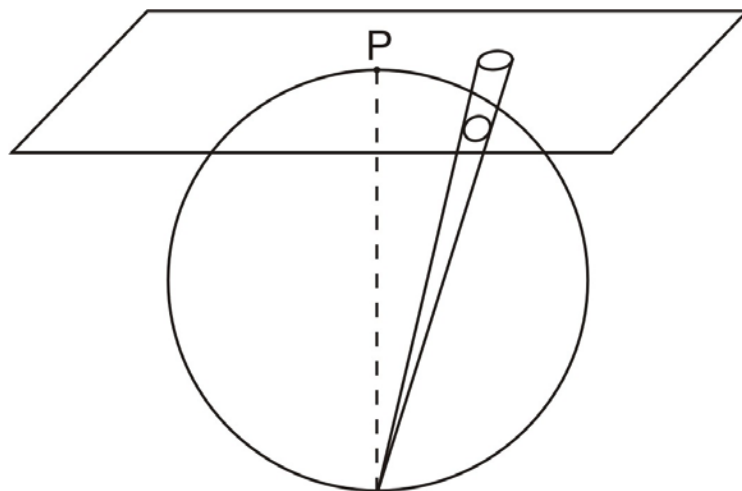


Рис. 5.35. Изображение окружности в стереографической проекции

Поскольку ортодромия на сфере является окружностью, то она тоже изображается на картах в стереографической проекции в виде окружности. Но ортодромия (дуга большого круга) – это окружность самого большого радиуса, которая может существовать на сфере. Очевидно, что и на карте ее радиус будет очень большим. В пределах листа карты, особенно вблизи точки касания, отрезок такой окружности выглядит практически в виде прямой линии. Поэтому на картах в стереографической проекции можно не только правильно измерять углы, но и прокладывать ортодромию по линейке.

Карты стереографической проекции издавна применялись для изображения полярных районов, в частности, ими пользовались В.Чкалов и М.Громов при перелете через Северный полюс в Америку. И в настоящее время компания «Джеппесен» и другие поставщики аэронавигационной информации выпускают карты для полетов по кроссполярным маршрутам в стереографической проекции на секущей плоскости. Выбирая широту φ_0 параллели сечения в уравнении проекции можно добиться минимальных искажений в пределах листа карты.

5.16. Общие сведения о конических проекциях

В любой конической проекции параллели изображаются дугами концентрических окружностей, а меридианы – радиальными прямыми линиями.

При развертке конуса на плоскость образуется вырезанный сектор, края которого соответствуют линии разреза (рис.5.36).

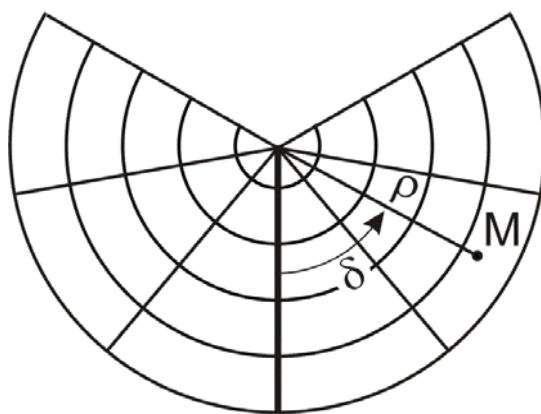


Рис. 5.36. Общий вид картографической сетки в конических проекциях

Общие уравнения конических проекций похожи на уравнения азимутальных и отличаются от них только множителем α перед долготой, который и свидетельствует о пропорциональности (а не о равенстве) углов между меридианами разностям их долгот.

$$\begin{aligned}\rho &= f(\varphi), \\ \delta &= \alpha\lambda.\end{aligned}$$

Как и в азимутальных проекциях ρ зависит только от широты, а δ только от долготы (пропорциональны ей).

Проекция могут строиться на касательном или на секущем конусе (рис. 5.37).

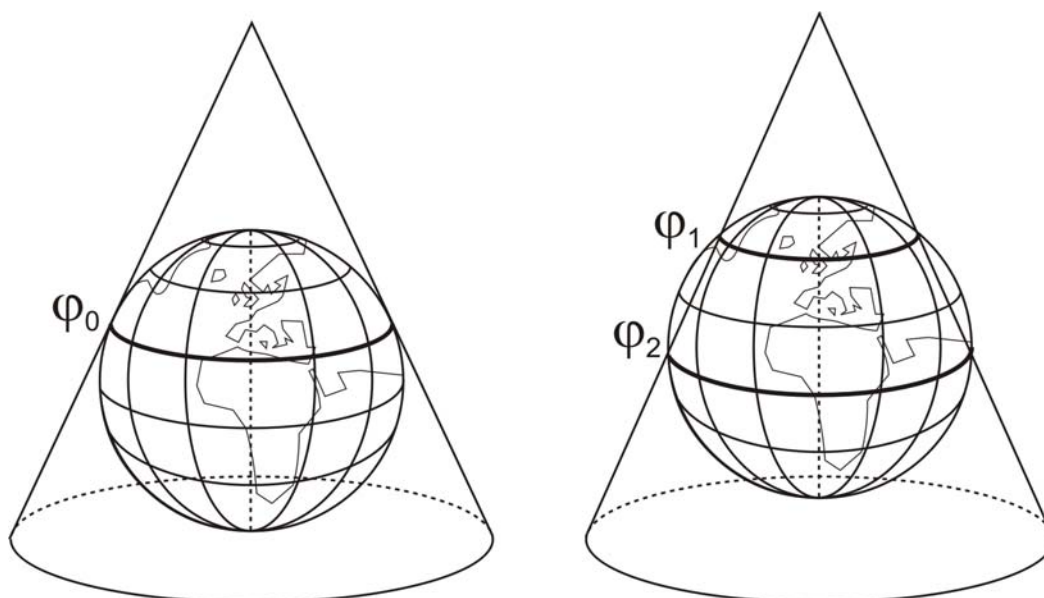


Рис. 5.37. Конические проекции на касательном и секущем конусах

В первом случае конус касается глобуса по определенной параллели с широтой φ_0 , а во втором – пересекает глобус по двум параллелям с широтами φ_1 и φ_2 , называемым *параллелями сечения* или *стандартными параллелями*.

Конические проекции нашли широкое распространение в аэронавигации. Их анализ начнем с так называемой простой конической проекции на касательном конусе, которая сама в навигации не применяется, но служит основой для создания других важных проекций. При ее рассмотрении будут получены соотношения, необходимые в дальнейшем.

5.17. Простая коническая проекция

Геометрическая идея построения этой проекции похожа на идею построения рассмотренной выше простой цилиндрической проекции. Если считать, что меридианы (упругие металлические пластинки) прикреплены к глобусу на параллели касания с широтой φ_0 , то при распрямлении они лягут на поверхность надетого на глобус конуса. Параллели (резиночки), растянувшись, также лягут на конус. После развертки конуса в плоскость образуется карта простой конической проекции.

При таком переходе с глобуса на конус меридианы не растягиваются и не сжимаются (просто распрямляются), поэтому произвольная точка M глобуса попадет на конусе (карте) в точку M' , находящуюся на таком же расстоянии от параллели касания, на каком она находилась на глобусе (рис. 5.38 и 5.39).

Пусть A – точка на параллели касания, E – точка на экваторе и на том же меридиане, что и A , O – центр сферы, а O' – вершина конуса (рис. 5.38). Тогда половина угла раствора конуса (угол $AO'O$) будет равна широте параллели касания φ_0 (угол EOA), поскольку это углы с взаимно перпендикулярными сторонами (касательная AO' перпендикулярна радиусу OA , а экватор EO перпендикулярен оси вращения Земли OO').

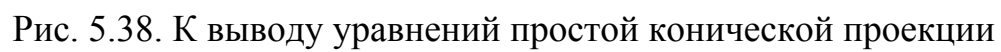
Обозначим радиус параллели касания на сфере через r_0 , а радиус параллели касания на карте ρ_0 . На сфере

$$r_0 = R \cos \varphi_0.$$

Величину ρ_0 можно найти из прямоугольного треугольника OAO' :

$$\rho_0 = \frac{r_0}{\sin \varphi_0} = \frac{R \cos \varphi_0}{\sin \varphi_0} = R \operatorname{ctg} \varphi_0.$$

Это выражение для радиуса параллели касания на карте справедливо не только для простой, но и для любой конической проекции.



Поскольку данная проекция строится путем «распрямления» меридианов, любая точка на карте находится на таком же расстоянии от параллели касания, на каком она находилась и на глобусе. Это расстояние, то есть длина дуги AM , равно $R(\varphi - \varphi_0)$ (рис. 5.39). Широты здесь, как обычно, измеряются в радианах.

Тогда для произвольной точки с широтой φ получим:

$$\rho = \rho_0 - R(\varphi - \varphi_0).$$

Это и будет первое из двух уравнений простой цилиндрической проекции. Второе уравнение одинаково для всех конических проекций:

$$\delta = \alpha \lambda.$$

Найдем коэффициент пропорциональности α . Для упрощения записи формул будем считать, что меридиан PAE , изображенный на рис. 5.38, это гринвичский меридиан, от которого отсчитываются долготы. На рис. 5.39 он изображен прямой $P'A'$.

Пусть B — любая точка, которая, как и A , лежит на параллели касания (рис. 5.38), а B' — ее изображение на карте (рис. 5.39).

На сфере длина дуги параллели AB равна:

$$\overset{\cup}{AB} = r_0 \lambda.$$

На карте длина изображения этой дуги ($A'B'$) точно такая же, поскольку параллель касания не искажается: $A'B' = AB$. Тогда по длине дуги и ее радиусу ρ_0 можно найти угол δ между гринвичским меридианом и меридианом точки B' :

$$\delta = \frac{\overset{\cup}{AB}}{\rho_0} = \frac{R \cos \varphi_0 \lambda}{\frac{R \cos \varphi_0}{\sin \varphi_0}},$$

откуда получаем

$$\delta = \sin \varphi_0 \lambda.$$

Сравнивая полученное выражение со вторым уравнением проекции в общем виде можно сделать вывод, что коэффициент α равен синусу широты параллели касания:

$$\alpha = \sin \varphi_0.$$

Исходя из способа построения данной проекции, очевидно, что она является равнопромежуточной по меридиану (меридианы при распрямлении не растягивались), хотя, разумеется, этот вывод можно получить и математически:

$$m = 1.$$

Частный масштаб по параллели найдем уже не раз применявшимся способом как отношение бесконечно малых отрезков параллели на карте и на глобусе. При этом можно учесть, что поскольку

$$\delta = \alpha \lambda,$$

то

$$d\delta = \alpha d\lambda.$$

Следовательно

$$n = \frac{\rho d\delta}{R \cos \varphi d\lambda} = \frac{\rho \alpha d\lambda}{R \cos \varphi d\lambda} = \frac{\rho \alpha}{R \cos \varphi}.$$

В это выражение можно при необходимости подставить ρ из первого уравнения проекции.

Если точка расположена на параллели касания, то есть $\varphi = \varphi_0$, то

$$\rho = \rho_0 = R \operatorname{ctg} \varphi_0,$$

следовательно

$$n = \frac{\rho \alpha}{R \cos \varphi} = \frac{R \operatorname{ctg} \varphi_0 \sin \varphi_0}{R \cos \varphi} = 1.$$

Это означает, что на параллели касания не только $m=1$, но и $n=1$, то есть никаких искажений нет. Это и неудивительно, поскольку параллель касания на глобусе и на карте – это одна и та же линия.

Анализируя формулу для частного масштаба по параллели, можно убедиться, что на параллелях севернее и южнее параллели касания $n > 1$, то есть параллели растягиваются – тем сильнее, чем дальше от параллели с широтой φ_0 .

5.18. Равноугольные конические проекции

Идея данной проекции заключается в том, чтобы, как и в проекции Меркатора, растянуть меридианы простой конической проекции в такой же степени, в какой растянуты параллели на данной широте, чтобы проекция стала равноугольной ($m = n$). Также как в меркаторской проекции, получить уравнения равноугольных конических проекций можно чисто математическим путем, поставив условие, чтобы масштаб по меридиану был равен масштабу по параллели.

В рассмотренной выше простой конической проекции

$$n = \frac{\rho \alpha}{R \cos \varphi}.$$

Потребуем, чтобы таким же был и частный масштаб по меридиану.

В общем случае в конических и азимутальных проекциях

$$m = -\frac{d\rho}{Rd\varphi}.$$

В данном случае знак «минус» важен, это знак производной от ρ по φ . Он свидетельствует о том, что при увеличении φ значение ρ уменьшается.

Приравняв выражения для частных масштабов по меридиану и параллели, получим

$$\frac{\rho\alpha}{R\cos\varphi} = -\frac{d\rho}{Rd\varphi}.$$

Это же равенство можно записать в виде

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{d\varphi}{\cos\varphi}\alpha.$$

Проинтегрируем обе части равенства с учетом того, что

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

и получим:

$$\ln \rho = -\alpha \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \ln k.$$

Здесь для удобства через $\ln k$ обозначена постоянная интегрирования (произвольное число), обычно в математике обозначаемая буквой C . Это можно сделать, поскольку любое C является логарифмом какого-то k .

Проведя потенцирование, то есть операцию, обратную логарифмированию, с учетом известных свойств логарифмов получим

$$\rho = \frac{k}{\operatorname{tg}^{\alpha}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Для упрощения записи формул принято обозначать

$$U = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Тогда искомые уравнения равноугольных конических проекций примут вид

$$\rho = \frac{k}{U^{\alpha}},$$

$$\delta = \alpha \lambda.$$

В этих уравнениях кроме, долготы и широты (широта входит в U), имеются два параметра - k и α .

Для выяснения физического смысла величины k подставим в первое уравнение $\varphi = 0$. Тогда $U=1$, а $\rho = k$.

Таким образом, k – это радиус экватора на карте.

В простой конической проекции α имела физический смысл широты параллели касания. Рассмотрим, каков смысл этой величины в данной проекции.

Для этого найдем, при каком значении φ частный масштаб по параллели n (а, следовательно, и m , поскольку они равны) принимает наименьшее значение.

$$n = \frac{\rho\alpha}{R \cos \varphi} \rightarrow \min.$$

Математически легче искать минимум не n , а $\ln n$. Поскольку логарифм – функция монотонно возрастающая, минимум обеих этих величин будет достигнут при одном и том же значении φ . Для этого прологарифмируем обе части равенства:

$$\ln n = \ln \rho + \ln \alpha - \ln R - \ln \cos \varphi.$$

Как известно, экстремум функции находят путем приравнивания ее производной нулю. Продифференцируем полученное выражение, учитывая, что α и R - постоянные величины, следовательно и

$$\ln \alpha = \text{const}, \quad \ln R = \text{const}.$$

Используя правила дифференцирования сложной функции, получим

$$(\ln n)' = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{d\varphi} - \frac{(\cos \varphi)'}{\cos \varphi} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{d\varphi} + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}.$$

Подставляя выражение для $\frac{d\rho}{d\varphi}$ из формулы (), можно записать:

$$(\ln n)' = -\frac{\alpha}{\cos \varphi} + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}.$$

Приравняем полученную производную нулю, чтобы найти широту (обозначим ее φ_0), при которой n минимален.

$$-\frac{\alpha}{\cos \varphi_0} + \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi_0} = 0.$$

Отсюда легко найти, что

$$\sin \varphi_0 = \alpha.$$

Таким образом, *физический смысл α - это синус широты с наименьшим масштабом.*

Это не противоречит смыслу α и в простой конической проекции – ведь там параллель касания и была параллелью с наименьшим масштабом.

Соберем вместе формулы, касающиеся равноугольных конических проекций.

Уравнения проекций:

$$\rho = \frac{k}{U^\alpha},$$

$$\delta = \alpha\lambda,$$

где

$$U = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\alpha = \sin\varphi_0,$$

φ_0 – широта параллели, на которой масштаб наименьший,

k – радиус экватора на проекции.

Частные масштабы:

$$m = n = \frac{\alpha\rho}{R \cos \varphi}.$$

Таким образом, получены общие уравнения равноугольных конических проекций. Но ранее уже отмечалось, что азимутальные и цилиндрические проекции являются частным случаем конических. Следовательно, получены общие уравнения равноугольных проекций вообще.

Параметры проекции α и k , хотя и имеют указанный выше физический смысл, но могут выбираться при построении проекций произвольно. Любой паре α и k будет соответствовать своя, обязательно равноугольная, проекция.

5.19. Виды равноугольных конических проекций

Выбирая различные α и k в общих уравнениях равноугольных конических проекций, можно построить проекцию, удовлетворяющую заданным требованиям. Поскольку параметров два, можно предъявить два требования. Рассмотрим некоторые из возможных вариантов таких пар требований.

1) *Масштаб на заданной параллели карты с широтой φ_0 является наименьшим и равен 1.*

Требований здесь два: первое – масштаб на заданной параллели наименьший, второе – он равен единице.

Первый параметр проекции легко определить:

$$\alpha = \sin \varphi_0$$

А теперь необходимо, чтобы частный масштаб n_0 на этой параллели, был равен единице:

$$n_0 = \frac{\alpha \rho_0}{r_0} = 1,$$

где $r_0 = R \cos \varphi_0$ - радиус данной параллели на глобусе.

В соответствии с уравнением проекции радиус этой параллели на карте

$$\rho_0 = \frac{k}{U_0^\alpha}.$$

Подставив в выражение для частного масштаба ρ_0 и r_0 , а затем и U_0 , выразим из него k .

$$k = \frac{r_0 U_0^\alpha}{\alpha} = \frac{R \cos \varphi_0 \operatorname{tg}^\alpha \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\alpha}.$$

Таким образом, требуемые α и k найдены.

Этот случай соответствует проекции на касательный конус, а φ_0 – широта параллели касания глобуса конусом.

2) Масштаб равен 1 на двух заданных широтах φ_1 и φ_2 . Эти требования геометрически соответствуют проекции на секущий конус.

Найдем, какие должны быть α и k для удовлетворения заданных требований.

Из первого требования, заключающегося в том, что на двух параллелях масштабы одинаковы, можно записать

$$\frac{\alpha \rho_1}{r_1} = \frac{\alpha \rho_2}{r_2}.$$

Здесь и далее индексы 1 и 2 соответствуют двум заданным параллелям. Учитывая, что

$$\rho = \frac{k}{U^\alpha},$$

получим

$$\frac{k}{r_1 U_1^\alpha} = \frac{k}{r_2 U_2^\alpha},$$

откуда, после сокращения k , следует

$$r_1 U_1^\alpha = r_2 U_2^\alpha.$$

Прологарифмируем обе части равенства.

$$\ln r_1 + \alpha \ln U_1 = \ln r_2 + \alpha \ln U_2,$$

откуда можно найти искомое значение

$$\alpha = \frac{\ln r_1 - \ln r_2}{\ln U_2 - \ln U_1}.$$

Из второго требования, заключающегося в том, что масштаб на любой из выбранных параллелей (например, на первой) должен быть равен именно единице, получим

$$\frac{\alpha \rho_1}{r_1} = 1.$$

Учитывая, что

$$\rho = \frac{k}{U^\alpha},$$

получим

$$\frac{\alpha k}{r_1 U^\alpha} = 1,$$

откуда

$$k = \frac{r_1 U_1^\alpha}{\alpha}.$$

Разумеется, все то же самое можно было бы проделать применительно ко второй параллели и было бы получено такое же значение k , то есть

$$k = \frac{r_2 U_2^\alpha}{\alpha}.$$

Равноугольная коническая проекция, в которой параметры α и k определены рассмотренным образом, получила название *проекции Ламберта на секущем конусе*.

5.20. Свойства проекции Ламберта

Иоганн Генрих Ламберт (1728-1777) – немецкий ученый, родившийся на нынешней территории Франции. Он не получил формального математического образования, то есть был самоучкой, но по праву считается одним из самых выдающихся математиков XVIII века. К его достижениям относятся доказательство иррациональности числа «пи», введение гиперболических тригонометрических функций и многое другое. В 1772 году им были разработаны равноугольные коническая и азимутальная проекции, получившие его имя.

В такой равноугольной конической проекции на секущем конусе (проекции Ламберта) составлены маршрутные карты компании Джеппесен и других фирм, а также отечественные радионавигационные карты (РНК).

Поскольку проекция равноугольная, во всех точках карты частный масштаб одинаков по всем направлениям, то есть выполняется условие $m=n$. Как показано в предыдущем параграфе (пункт 2), на параллелях сечения (стандартных параллелях) масштаб равен единице. Можно показать математически, что между параллелями сечения масштаб меньше единицы ($m=n<1$), то есть изображение сжато по сравнению с глобусом, а к северу и к югу от параллелей сечения $m=n>1$, изображение растянуто (рис. 5.40). Чем дальше точка от параллелей сечения, тем больше искажения.

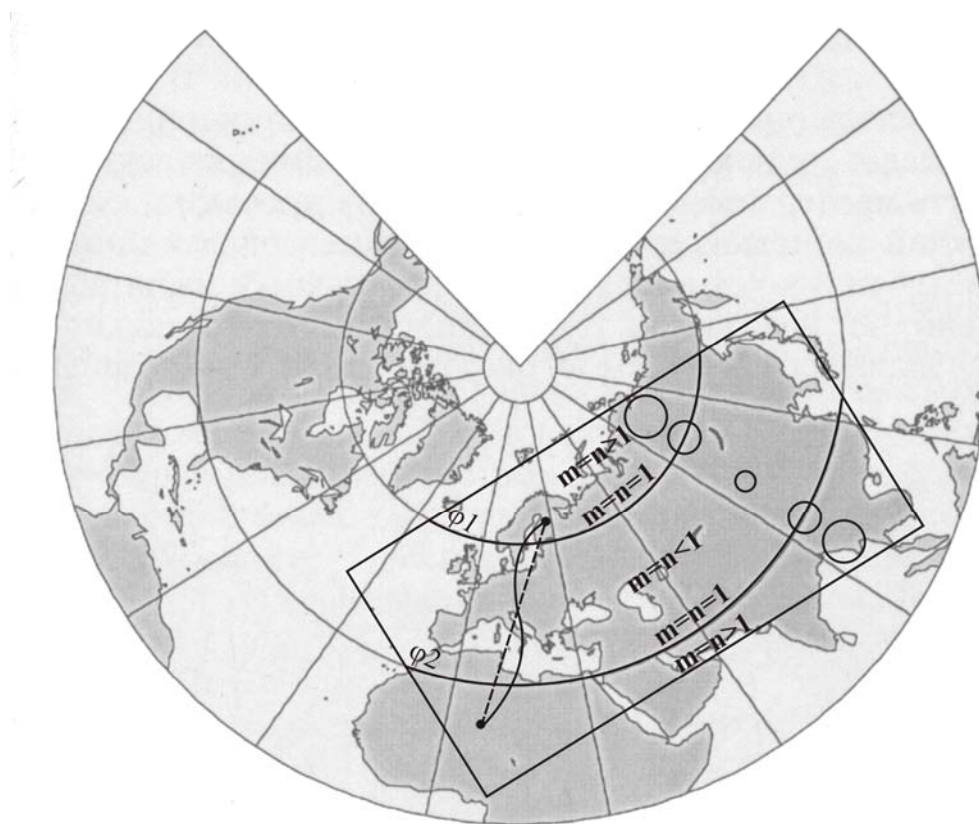


Рис. 5.40. Эллипс искажений и ортодромия на картах в проекции Ламберта

Маршрутные карты обычно издаются в главных масштабах от 15 до 40 км в сантиметре карты. На листе такой карты, конечно, не уместится вся территория земного шара и картографическая сетка вовсе не выглядит как полная карта Земли, хотя меридианы и параллели на ней имеют такую же форму. Маршрутная карта представляет собой небольшой прямоугольный кусочек полной карты, расположенный и ориентированный так, чтобы охватить нужную территорию и маршруты полета (рис.5.40).

Если район охвата маршрутной карты находится далеко от стандартных параллелей общей карты (из которой она как бы «вырезана»), то искажения могут быть довольно велики. Поэтому целесообразно для каждой маршрутной карты выбирать свои параллели сечения таким образом, чтобы обеспечить минимальные искажения в пределах листа карты. В компании Джеппесен при разработке карт рекомендуется, чтобы стандартные параллели проходили через лист карты и между ними было примерно две трети площади карты. Соответственно, севернее и южнее стандартных параллелей – по одной шестой части площади. В этом случае максимальные искажения (они будут иметь место на верхнем и нижнем образах и посередине карты) практически не будут заметны.

Широты параллелей сечения на картах «Джеппесен» указаны в левом верхнем углу карты, например: Lambert Conformal Conic Proj. – Std. Par. 37° and 45°. На российских РНК они указаны на титульной панели и названы широтами «опорных» параллелей.

Если широты φ_1 и φ_2 параллелей сечения (стандартных параллелей) известны, то можно найти параметры проекции α и k , в которой выполнен данный лист карты:

$$\alpha = \frac{\ln r_1 - \ln r_2}{\ln U_2 - \ln U_1},$$

$$k = \frac{r_1 U_1^\alpha}{\alpha} = \frac{r_2 U_2^\alpha}{\alpha},$$

где $r_1 = R \cos \varphi_1$, $r_2 = R \cos \varphi_2$,

$$U = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Для упрощения вычислений можно принять $R=1$, поскольку разность логарифмов в первой из вышеприведенных формул от величины R не зависит.

По рассчитанным параметрам проекции можно определить частный масштаб в любой точке карты с широтой φ :

$$m = n = \frac{\alpha \rho}{r} = \frac{\alpha \rho}{R \cos \varphi},$$

где

$$\rho = \frac{k}{U^\alpha} = \frac{k}{\operatorname{tg}^\alpha \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)},$$

а R также можно принять равным единице.

Ортодромия на карте проекции Ламберта изображается трансцендентной кривой, близкой к окружности большого радиуса, и обращенной выпуклостью в сторону большего масштаба, то есть от параллели с широтой φ_0 (рис. 5.40)..

Максимальное отклонение ортодромии от прямой линии на карте можно рассчитать по приближенной формуле

$$z_{\max} \cong \frac{S \Delta \lambda^\circ}{460} (\sin \varphi_{\text{ср}} - \sin \varphi_0),$$

где S – длина ортодромии, $\Delta \lambda^\circ$ – разность долгот начала и конца ортодромии (в градусах), $\varphi_{\text{ср}}$ и φ_0 – соответственно средняя широта ортодромии и широта параллели с наименьшим масштабом.

Если параллели сечения на карте выбраны правильно, то ортодромию длиной до 1000 км на карте в проекции Ламберта можно прокладывать по линейке – отклонение будет незначительным.

5.21. Понятие о поликонических проекциях

В конических проекциях на касательном конусе без искажений изображается параллель, по которой конус касается глобуса. Каждому углу раствора конуса соответствует своя параллель касания. *Идея построения поликонических проекций заключается в проектировании каждой параллели на свой конус.* Приставка «поли» означает «много». Параллелей бесконечно много, поэтому и проектирование осуществляется на бесконечное количество конусов. Геометрически представить это трудно, но в этом и нет необходимости. Ведь проекция – это просто закон, устанавливающий связь между точками глобуса и карты, и он не обязан иметь наглядной интерпретации.

В рассмотренных выше проекциях эта связь устанавливалась математически – с помощью уравнений проекции. Поликонические проекции задаются не формулами, а порядком (алгоритмом) построения

картографической сетки. Действительно, если четко определено, как проходят изображения меридианов и параллелей на карте, то тем самым и будет однозначно установлена связь глобуса с картой.

В поликонической проекции лучше всего изображать не всю поверхность Земли, а ее отдельные территории, вытянутые с севера на юг.

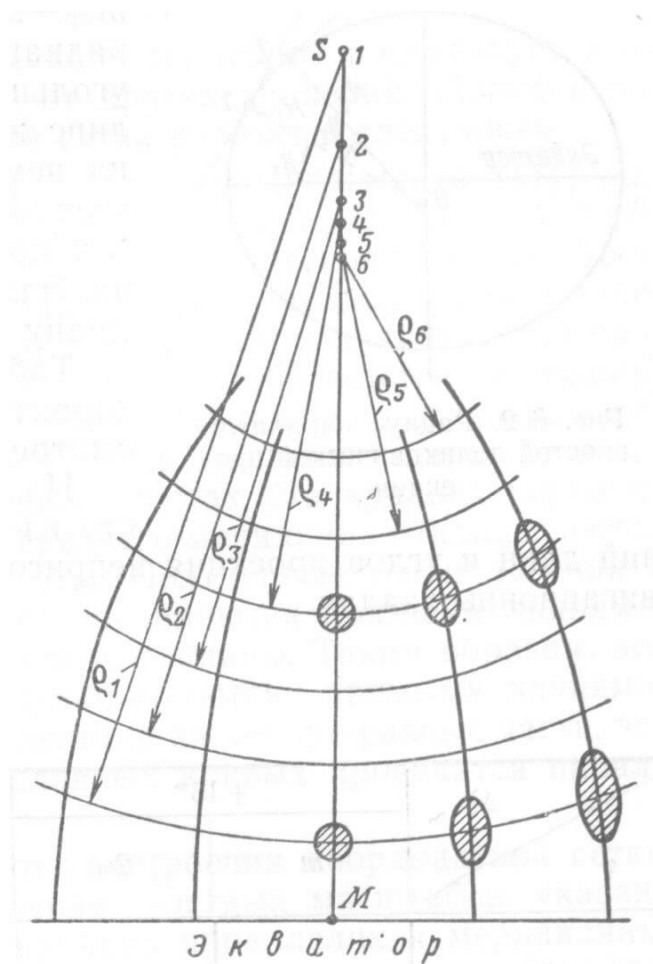


Рис. 5.41. Картографическая сетка поликонической проекции

Порядок построения картографической сетки поликонической проекции следующий (рис. 5.41).

1. Выбирается средний меридиан изображаемой области Земли и изображается на карте в виде прямой линии в натуральную величину.

2. Меридиан делится на части, пропорциональные разности широт. Например, через каждые 10° (или с любым другим шагом).

3. Через полученные точки проводят параллели в виде окружностей с радиусом $\rho = R \operatorname{ctg} \varphi$, (если на карту проектируется сфера) или $\rho = N \operatorname{ctg} B$ (если проектируется эллипсоид). Центры этих окружностей лежат на среднем меридиане, но в разных точках, и радиусы различны для каждой параллели. Формула для расчета радиуса параллели такая же, как для радиуса параллели касания в конических проекциях (см. параграф о простой конической проекции). Но в конических проекциях параллель касания одна, а в

поликонических таким же образом рассчитывается радиус *каждой* параллели.

Для экватора, который тоже является параллелью, радиус получается равным бесконечности, поэтому экватор изображается в виде прямой.

4. Каждая параллель разбивается на отрезки, равные отрезкам параллелей на глобусе (например, через каждые 10°). Точки с одинаковыми долготами соединяются плавными кривыми, изображающими меридианы.

Таким образом, в поликонических проекциях средний меридиан и экватор изображаются прямыми линиями, параллели – неконцентрическими окружностями разного радиуса, остальные меридианы – сложные кривые.

В поликонических проекциях главные направления (оси эллипса искажений) совпадают с меридианами и параллелями только на среднем меридиане и экваторе, то есть проекция является не ортогональной. Чем дальше точка от среднего меридиана, тем больше искажения.

В поликонической проекции часто издаются настенные карты мира, России, а также карты в атласах (рис. 5.42).

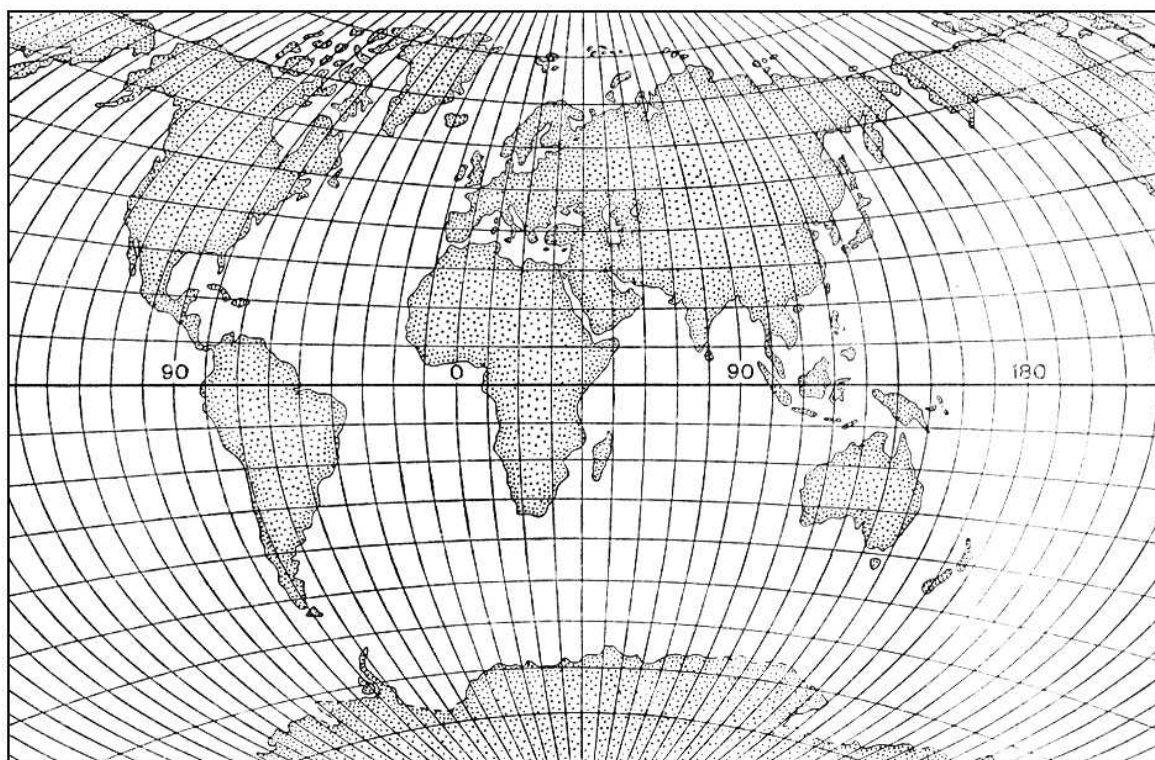


Рис. 5.42. Карта мира в поликонической проекции

В авионавигации поликоническая проекция не используется, но на ее основе разработана видоизмененная поликоническая проекция, нашедшая широкое применение.

5.22. Видоизмененная поликоническая (международная) проекция

Каждая страна сама выбирает для издаваемых ею карт вид проекции, масштаб, условные обозначения и разграфку листов по охватываемой картами территории. Не удивительно, что карты, изданные в разных странах, существенно различаются.

В 1909 г. в Лондоне на международной географической конференции было принято принципиальное решение о создании международной карты мира миллионного масштаба, имеющей единые разграфку, условные обозначения, проекцию и масштаб. В 1913 г. в Париже были утверждены «Основные положения» о проекции такой карты, получившей собственное название «Международная проекция». Ее основой является поликоническая проекция, но с некоторыми изменениями, направленными на уменьшение искажений.

В нашей стране в этой проекции издаются аэронавигационные карты масштаба 1:1000000, 1:2000000, 1:4000000. Основной является карта масштаба 1:1000000.

Международная проекция является многогранной (многолистной) проекцией эллипсоида. Каждая сфероидическая трапеция эллипсоида, ограниченная двумя меридианами и двумя параллелями, проектируется на плоскость самостоятельно (рис. 5.43).

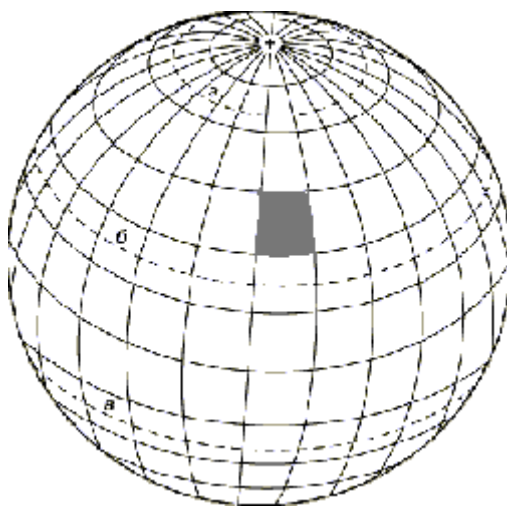


Рис. 5.43. Сфероидическая трапеция

Для большей части эллипсоида установлен размер трапеции по широте $\Delta\varphi=4^\circ$, а по долготе $\Delta\lambda=6^\circ$, лишь в полярных районах размер по долготе увеличивается до 12° . Поскольку речь идет об эллипсоиде, на самом деле здесь, несмотря на обозначения, имеются в виду геодезические широты и долготы (В и L).

Для каждой трапеции порядок построения картографической сетки следующий.

1. В натуральную величину в виде прямых линий изображаются не один, как в обычной поликонической проекции, а два меридиана, отстоящие от среднего меридиана трапеции на 2° градуса к востоку и западу.

2. Крайние параллели вычерчиваются в натуральную величину в виде окружностей радиусом $\rho = N \operatorname{ctg} B$, то есть тем же радиусом, которым в простой поликонической проекции вычерчивались все параллели.

3. Крайние параллели делятся на отрезки через 1° (если выбран такой шаг сетки) и через деления проводят меридианы в виде прямых линий.

4. Каждый меридиан делят на 4 части (поскольку размер трапеции по широте 4°) и через деления в виде плавных линий проводят параллели.

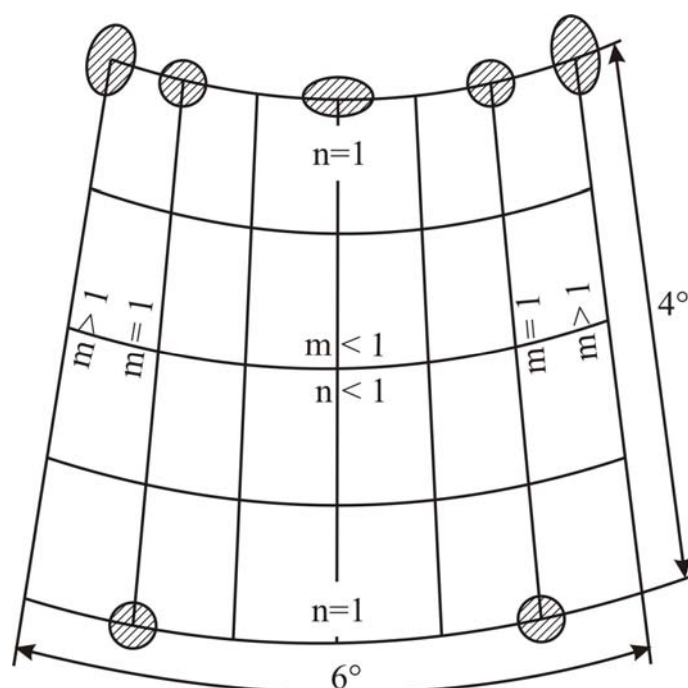


Рис. 5.44. Картографическая сетка видоизмененной поликонической проекции

Таким образом, в этой проекции все меридианы являются прямыми, но только два из них изображены в натуральную величину ($m=1$).

Самая северная и самая южная параллели трапеции являются окружностями и изображаются в натуральную величину ($n=1$), остальные параллели являются сложными кривыми (рис. 5.44).

Такой, на первый взгляд, усложненный порядок построения проекции обусловлен стремлением максимально уменьшить искажения на карте. Очевидно, что точками, где искажения минимальны, а точнее – вообще отсутствуют, являются точки пересечения двух средних меридианов с двумя крайними параллелями. В этих точках $m=n=1$. Но и в других местах карты отклонения частных масштабов невелики.

Частный масштаб по меридиану в любой точке может быть рассчитан по формуле

$$m=1+0,0001523 (\Delta\lambda^2-4)\cos^2 \varphi,$$

где $\Delta\lambda$ –разность долгот меридиана точки и среднего меридиана карты (в градусах),

φ – широта точки.

Из формулы можно видеть, что максимальное отклонение m от единицы имеет место на среднем меридиане трапеции ($\Delta\lambda=0$) на экваториальных листах карты ($\varphi=0$, $\cos \varphi=1$), но даже здесь оно не превышает 0,06%.

На крайних параллелях частный масштаб по параллели $n=1$, поскольку они изображены в натуральную величину. Наибольшее отличие этого масштаба от единицы имеет место на средней параллели трапеции, где

$$n=1-0,0001523(\Delta\varphi^2/4).$$

Здесь $\Delta\varphi$ - размер листа карты по широте (в градусах), то есть для карты миллионного масштаба $\Delta\varphi=4^\circ$.

Таким образом, видоизмененная поликоническая проекция является по характеру искажений произвольной, но искажения очень малы. Наибольшие искажения имеют место на экваториальных листах карты, где достигают по расстояниям 76 м на 100 км, а по углам $5'$. Очевидно, что такие погрешности при работе на карте с транспортиром и линейкой заметить невозможно.

За высокую точность проекции приходится платить тем, что поверхность Земли отображается не сплошной картой, а отдельными участками (трапециями). Это ограничивает возможности склеивания отдельных листов в большую карту. Листы можно легко склеить в полосу с севера на юг или с запада на восток, но при попытках склеить листы карты в блок, образуются разрывы между листами (рис. 5.45).

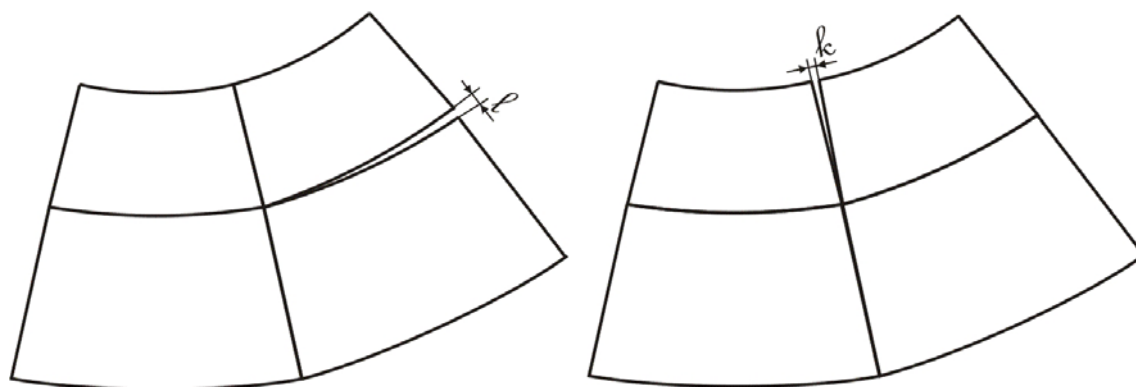


Рис. 5.45. Разрывы при склеивании листов международной карты

В зависимости от последовательности склеивания листов, края карт разойдутся на величину (в миллиметрах)

$$l_{\text{мм}} = 3,25 \cos \varphi_{\text{ср}}$$
$$k_{\text{мм}} = 4,87 \cos^2 \varphi_{\text{ср}}.$$

По такому же принципу, как и карта масштаба 1:1000000, строятся карты других масштабов. Например, для карт масштаба 1:2000000 («двадцатикилометровка») размер трапеции по широте 12° , а по долготе 18° , то есть в три раза больше (по площади – в 9 раз). Но чем больше трапеция, тем больше искажения. На большей части площади «двадцатикилометровки» максимальные искажения расстояний не превышают 0,5%, а углов $0,2^\circ$. Но в «углах» трапеции искажения могут быть значительно больше – до 3% по расстояниям и 2° по углам. Для выпускавшейся ранее в этой же проекции карты масштаба 1:4000000, искажения еще более значительны.

5.23. Разграфка и номенклатура карт

Разграфка – деление единой карты всей земной поверхности на отдельные листы. Она определяет, территория каких размеров и конфигурации размещается на каждом листе карты, каковы ее границы. *Номенклатура* – буквенно-цифровое обозначение листов карты. Принцип ее построения необходимо знать, чтобы правильно определить, какие карты необходимы для конкретного полета, и правильно составить заказ на их приобретение.

Разграфка, или как иногда говорят – «нарезка», маршрутных карт, выпускаемых различными поставщиками аэронавигационной информации («Джеппесен», ЦАИ ГА и др.), определяется самими издателями карт в соответствии с потребностями заказчиков. В зависимости от направления маршрутов полетов карты могут быть ориентированы по-разному: «вытянуты» с севера на юг, с запада на восток или в любом другом удобном направлении.

Разграфка и номенклатура крупномасштабных топографических карт, а также аэронавигационных карт масштабов от 1:500000 до 1:4000000 четко определена. В основу номенклатуры положена рассмотренная в предыдущем параграфе карта масштаба 1:1000000 международной проекции с размером листа $\Delta\varphi=4^\circ$, $\Delta\lambda=6^\circ$.

1) Карта масштаба 1:1000000.

Земля делится на ряды ($\Delta\varphi=4^\circ$) и колонки ($\Delta\lambda=6^\circ$) по параллелям и меридианам (рис.5.46). Ряды обозначаются заглавными латинскими буквами от А до У, начиная от экватора. Колонки обозначаются заглавными арабскими цифрами (1,2,3...), начиная от меридиана 180° на восток, всего 60

колонок. Зная координаты точки, нетрудно рассчитать в какой ряд и колонку она попадет. Например, Москва попадает на лист карты с номенклатурой N-37, а Санкт-Петербург O-36. Номенклатура карты указывается в верхнем левом углу на обрезе карты.

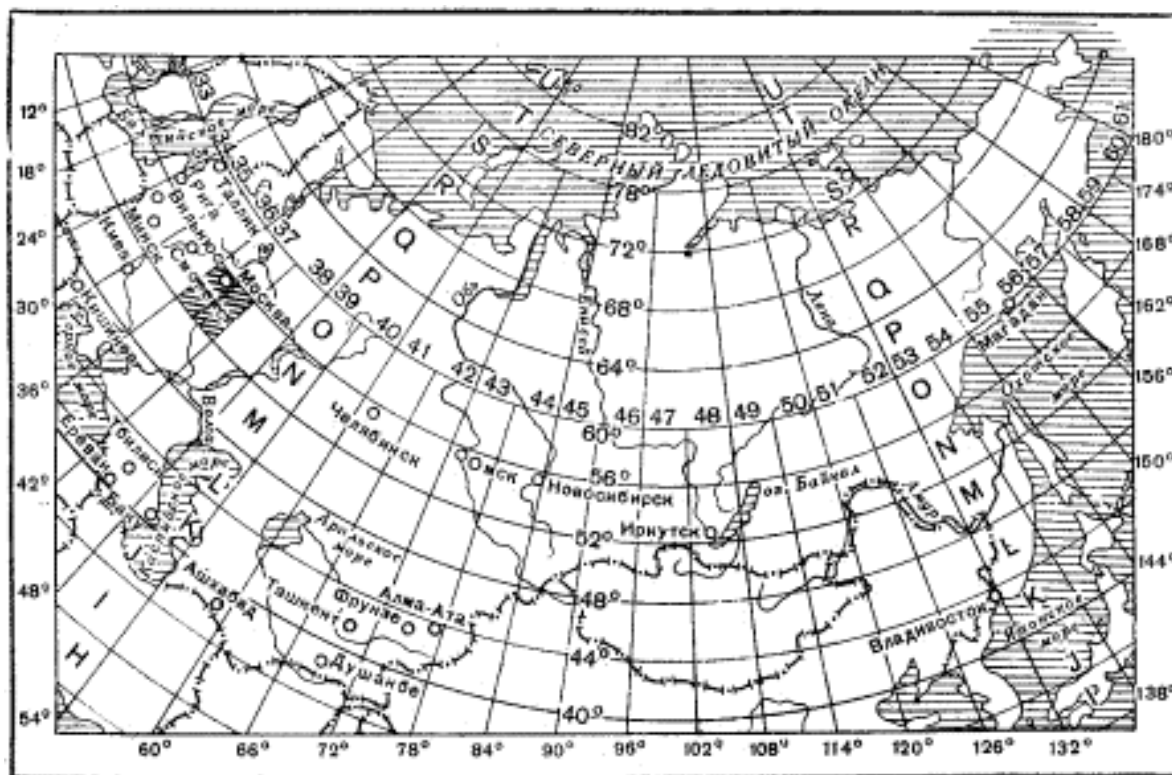


Рис. 5.46. Разграфка и номенклатура карт масштаба 1:1 000 000

В районах, близких к полюсу, меридианы проходят все ближе друг к другу, колонки становятся узкими и занимают меньше места на бумаге. Поэтому для широт от 60° до 84° на один лист помещают сдвоенную по параллели карту, то есть размер трапеции по долготе составляет $\Delta\lambda = 12^\circ$. А на широтах от 84° до 88° (это ряд V) колонки учетверяют ($\Delta\lambda = 24^\circ$).

Район полюса (широта более 88°) изображают на отдельном листе и обозначают его буквой Z.

2) Карта масштаба 1:500 000.

Образуется делением на 4 части листа карты M 1:1000000 (рис. 5.47). Каждая часть обозначается русской заглавной буквой: А,Б,В,Г. Номенклатура включает в себя номенклатуру «миллионной» карты, то есть карты масштаба 1:1 000 000, и букву. Например, N=36-A (на рис. 5.47 выделена штриховкой по контуру).

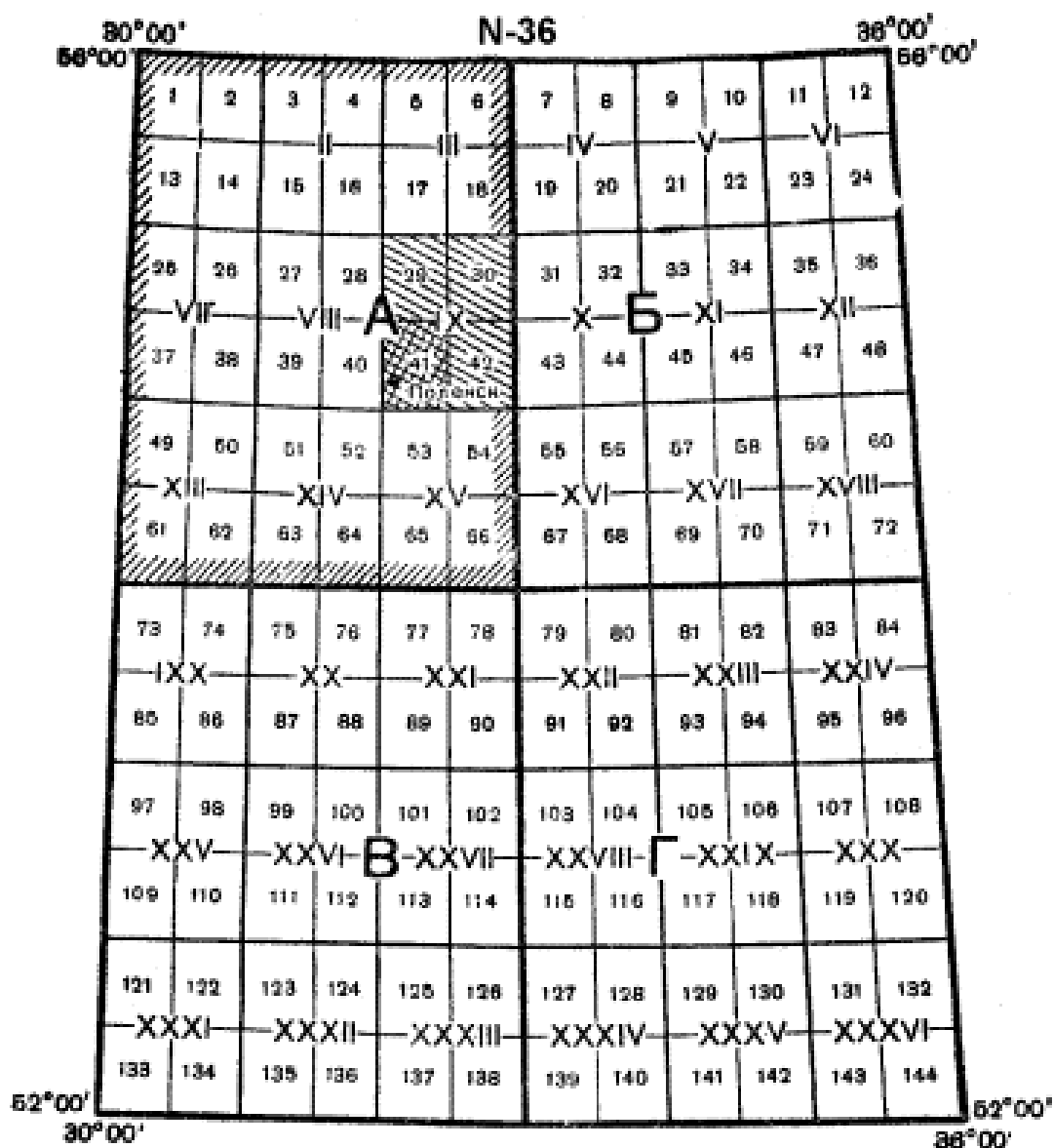


Рис. 5.47. Разграфка карт крупного масштаба от 1:500 000 до 1:100 000

Разумеется, трапеция, охватываемая этой картой, в два раза меньше по широте и долготе.

В районах севернее 60° на одном листе бумаги размещают по две таких трапеции. В этом случае номенклатура может иметь, например, такой вид: Р-38-В,Г.

3) Карты масштаба 1:200 000.

«Миллионная» карта делится на 36 частей, нумеруемых римскими цифрами последовательно с запада на восток и с севера на юг (слева направо и сверху вниз), как показано на рис. 5.47. Размер листа $40'$ по широте и 1° по долготе. Номенклатура включает в себя номенклатуру карты 1:1000 000 и номер листа, например, N-36-IX (на рис. 5.47 заштрихован полностью).

4) *Карты масштаба 1:100 000.*

Принцип разграфки аналогичен, но «миллионная» карта делится на 144 части (12 рядов и 12 колонок), нумеруемых арабскими цифрами (рис. 5.47). Размер листа 20' x 30'. Пример номенклатуры: N-36-127.

5) *Карты масштаба 1:50 000.*

Образуется путем деления «стотысячной карты» (М 1:100 000) на четыре части, обозначаемые русскими заглавными буквами (рис. 5.48).

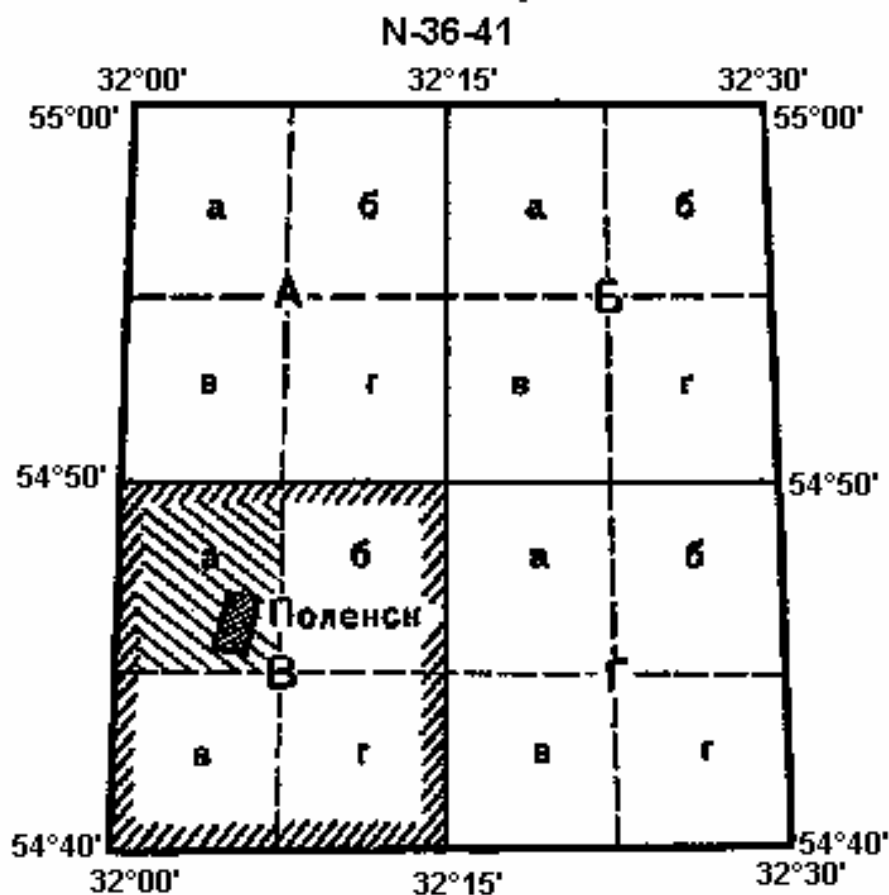


Рис. 5.48. Разграфка и номенклатура карт масштабов 1:50 000 и 1:25 000

Номенклатура включает в себя номенклатуру «стотысячной» карты и соответствующую букву. Например, N-36-41-В (на рис. 5.48 выделена штриховкой по контуру).

6) *Карты масштаба 1:25 000.*

Теперь уже карта М 1:50 000 делится на четыре части, которые обозначаются русскими строчными буквами. Аналогично формируется и номенклатура, например, населенный пункт Поленск на рис. 5.48 находится на листе N-36-41-В-а.

7) *Аэронавигационные карты в международной проекции масштаба 1:2 000 000 («двадцатикилометровки»).*

Как уже отмечалось, размер трапеции, охватываемой такой картой составляет $\Delta\varphi=12^\circ$, $\Delta\lambda=18^\circ$. При разграфке земной шар также делится на ряды и колонки, но обозначаются они по-другому.

Ряды обозначаются русскими буквами от А до М, начиная от параллели 76° с.ш. в направлении на юг, а колонки - римскими цифрами, начиная от меридиана 12° з.д. на восток. Соответственно формируется и номенклатура, например, Б-III.

Фактически на лист карты размещают несколько больший район, чем трапеция, указанных размеров, чтобы обеспечить перекрытие смежных листов полетной карты.

5.24. Точность работы на аэронавигационных картах

При работе с аэронавигационной картой, то есть при определении по ней координат объектов, измерении направлений и расстояний, необходимо иметь четкое представление о возможных погрешностях выполнения этих операций. Основными составляющими этих погрешностей являются:

- искажения, присущие данной проекции карты,
- погрешности, возникающие при типографской печати карты,
- погрешности графической работы на карте при измерении расстояний линейкой и направлений транспортом,
- погрешности округления измеренных величин.

Конечно, могут иметь место и другие источники погрешностей, например, из-за деформации бумаги при изменении влажности воздуха.

Перед началом работы с картой необходимо обратить внимание на главный масштаб и вид проекции, в которой составлена карта. Обычно эти сведения указаны на обрезе или на титульной панели карты. Если по каким-либо причинам главный масштаб не указан, его можно приближенно установить самостоятельно. Проще всего это сделать, измерив расстояние вдоль меридиана между двумя нанесенными на карте параллелями. Поскольку на земной сфере 1° дуги меридиана эквивалентен примерно 111,2 км, нетрудно определить, сколько километров приходится на каждый сантиметр карты. Можно измерить и расстояние вдоль параллели, но следует помнить, что каждый градус параллели в $\cos\varphi$ раз короче.

Если на карте не указаны сведения о проекции, можно попытаться оценить ее по виду сетки меридианов и параллелей, если, конечно, на карте изображена нормальная для этой проекции сетка. Если меридианы параллельны, то проекция цилиндрическая. Если же они прямые, но проходят под углом друг к другу, то проекция азимутальная или коническая. Различить эти два класса проекций, можно, если измерить углы между двумя какими-либо меридианами. Если разность равна разности их долгот –

проекция азимутальная – если меньше – коническая. Практически измерить угол между меридианами можно, проведя прямую линию на карте и измерив транспортиром углы, под которыми она их пересекает. Разность углов и будет равна углу между меридианами.

Для конической проекции можно даже попытаться оценить параметр проекции α , а, значит, и широту параллели с наименьшим масштабом φ_0 ($\alpha = \sin \varphi_0$). Величина α равна отношению угла между меридианами на карте к разности их долгот.

Если расстояния между параллелями одинаковы, то проекция является равнопромежуточной по меридиану, поскольку и на сфере эти расстояния равны.

Определив характер проекции можно получить представление о том, как изменяются искажения в разных местах карты.

При печати карты в типографии наиболее точно наносится координатная сетка, среднее квадратическое смещение относительно истинного положения составляет 0,2-0,3 мм. Остальные объекты могут быть нанесены с точностью в 2-3 раза хуже.

Считается, что невооруженным глазом человек может различить две точки на бумаге (карте), если расстояние между ними не менее 0,1 мм. Соответствующее ему расстояние на земной поверхности иногда называют *точностью масштаба* карты. Например, для карты масштаба 1:2 000 000 (в 1 см 20 км) точность масштаба составит 200 метров.

При измерениях на карте возникают неизбежные и случайные погрешности графической работы из-за нетщательного использования транспортира и линейки, глазомерных ошибок. Экспериментально установлено, что средняя квадратическая погрешность измерения углов (например, пеленгов) на карте составляет $0,8^\circ$, а расстояний – 0,7 мм карты. Разумеется, в зависимости от масштаба, эта величина будет соответствовать разному количеству километров.

При определении координат с помощью картографической сетки необходимо обратить внимание на то, с каким шагом нанесены меридианы и параллели (обычно через один или два градуса). Для более точного отсчета координат на обрезе карты, а часто и на самих меридианах и параллелях нанесены минутные деления. Необходимо определить, через сколько минут они нанесены (обычно через 5, 10, или 20'), учитывая, что в 1° содержится 60'.

При отсчете измеренных расстояний, углов и координат человеку свойственно округлять полученные значения до целого количества единиц измерения. Например, если измеряется транспортиром угол, то обычно фиксируется значение с целым количеством градусов, даже если в принципе можно отсчитать его доли. Максимальная погрешность при округлении составляет 0,5 цены деления (в данном примере – градуса), а средняя квадратическая погрешность – 0,3 цены деления (линейки, транспортира, координатной шкалы).

5.25. Функции аэронавигационных карт

Если не очень сведущего в авиации человека спросить, чем занимается в полете штурман, то чаще всего ответ будет примерно такой: "Он ориентируется по карте и прокладывает на ней курс". Действительно, навигация (а именно ею и занимается штурман, пилот) прочно ассоциируется с картой. На протяжении веков карта является основным средством, инструментом для решения навигационных задач.

Уже в средние века создавали специальные карты для мореплавания. Пускай и без строгой математической основы, с не всегда достоверной географической информацией (достаточно вспомнить Колумба, попавшего вместо Азии в Америку), но и в таком виде карты обеспечивали возможность ведения общей ориентировки.

Уже в первые годы после зарождения авиации была осознана необходимость создания специальных карт для навигации в воздушной среде, то есть аэронавигации. Поначалу они основывались на обычных географических картах или строились по принципу морских карт. Но специфика авиации потребовала разработки карт, специально приспособленных для использования экипажами воздушных судов на различных этапах полета.

Современная аэронавигационная карта, предназначенная для полетов по приборам, мало похожа на обычную географическую. Неподготовленный человек вряд ли смог разобраться в нанесенной на ней информации. Но штурманы, пилоты, диспетчеры по обслуживанию воздушного движения (ОВД), специалисты по аэронавигационному обеспечению полетов должны хорошо понимать как "устроена" карта, просто обязаны знать нанесенные на ней условные обозначения, уметь их правильно интерпретировать (понимать стоящий за ними смысл), иметь навыки применения карты для решения своих задач.

В соответствии с определением ИКАО аэронавигационная карта - условное изображение участка земной поверхности, его рельефа и искусственных сооружений специально предназначенное для аэронавигации. А в соответствии с определением в сборнике аэронавигационной информации компании "Джеппесен" под аэронавигационной картой понимается карта, используемая в аэронавигации и содержащая, полностью или частично, топографические объекты, опасные объекты и препятствия, навигационные средства, маршруты полета, обозначенное воздушное пространство и аэродромы.

Следует учитывать, что в международной практике под аэронавигационной картой (aeronautical chart) понимается не только то, что похоже на обычную географическую карту, но и то, что в России называют "схемой" (вылета, прибытия, захода на посадку), публикуемой в сборниках аэронавигационной информации.

Лист карты, в самом грубом представлении, включает в себя две основные части: основное поле (собственно карта) и то, что находится за его рамками (обрезом карты, как выражаются в авиации). В свою очередь элементами собственно карты являются координатная сетка, географическое содержание и специальная информация, нанесенная на карту. Для двух последних элементов в авиации иногда используется термин "нагрузка" - соответственно географическая, аэронавигационная и т.д. Зарамочная информация включает в себя сведения, которые относятся к карте в целом и необходимы для ее применения. Это могут быть название карты или охватываемого ею региона, ее индекс (номенклатура), схема нарезки других листов карты аналогичного назначения, масштаб, вид проекции и ее параметры, дата составления и издательство, геодезическая основа карты (например, WGS-84), диаграмма искажений, условные обозначения на карте (ее легенда) и другие сведения.

Если проанализировать, какие задачи должна решать аэронавигационная карта, то можно выделить пять ее основных функций.

1. *Опорно-ориентировочная* функция карты заключается в возможности ее использования для ориентировки по сторонам света, определения взаимного расположения места самолета относительно земных объектов и самих объектов друг относительно друга. Этими объектами могут являться визуальные ориентиры, наземные радиомаяки, препятствия и т.п. В рамках данной функции карты речь не идет об определении координат этих объектов (это уже другая функция), а только об их общем взаимном расположении, выражаемом в терминах "севернее-южнее", "восточнее-западнее", "дальше-ближе", "правее-левее". Чтобы карта выполняла только эту функцию, не требуется наносить на карту объекты точно. Должна быть правильно отражена только структура местности. По такому принципу строятся карты подхода (прибытия) и выхода (вылета), которые выполнены не в масштабе, но обеспечивают правильную топологию маршрута и расположения аэродрома, наземных средств.

Важной составляющей этой функции карты является то, что она играет роль зрительной опоры для пилота при переработке им информации и принятии решений. Дело в том, что значительная часть информации, получаемой пилотом от навигационных средств, выражена не в наглядной, а в абстрактной числовой форме. Для принятия правильного решения пилот должен перекодировать полученную информацию в наглядное геометрическое представление, создать мысленный образ ситуации. Как говорят психологи, пилот должен сформировать навигационный образ полета, который гарантирует от грубых ошибок. Сделать это в уме не просто, но даже простейшая визуальная опора (карта), облегчает решение этой задачи. Например, если известно, что пункт А находится с азимутом 165° на удалении 100 км от аэродрома, а пункт В - в направлении 282° на удалении 180 км, то легко ли мысленно, хотя бы примерно, оценить направление из А в

В и расстояние между ним? При наличии же перед глазами карты, даже если на ней нет ничего, кроме аэродрома, сделать это гораздо легче.

В принципе для выполнения данной функции карта не обязательно должна быть бумажной, а объекты не обязательно должны находиться на земной поверхности. Это могут быть зоны опасных метеоявлений, другие воздушные суда, отображаемые на экране бортового радиолокатора или на синтезированной карте бортового навигационного дисплея.

2. *Географическая* функция. Она заключается в возможности получения информации о местоположении объектов на земной поверхности, их форме размерах и т.д. Географическая нагрузка карты включает в себя изображение естественных и искусственных объектов на земной поверхности, которые могут играть роль навигационных ориентиров: водных массивов, дорог, населенных пунктов, рельефа местности и т.д. Пилот может определить на карте местоположение Ивановки, пролет которой требует доложить диспетчер, опознать ориентир по его характерной конфигурации и т.п. В отличие от опорно-ориентировочной функции карты, в этом случае объекты должны быть размещены на карте в соответствии с их местоположением на Земле, то есть.. карта должна быть выполнена в масштабе. Функция названа географической, но объекты не обязательно должны быть именно географическими. Это могут быть наземные радиомаяки, воздушные трассы, изогоны (линии, соединяющие точки с одинаковым магнитным склонением), границы различных зон и т.п. Эти элементы карты можно отнести и к аэронавигационной информации, о которой будет идти речь при рассмотрении пятой функции. Но эти объекты жестко привязаны к Земле и в этом смысле подобны географическим объектам. Хотя визуально изогону или ЛЗП увидеть, конечно, невозможно.

Чем более подробна карта, чем больше объектов на ней нанесено, тем больше географической информации может получить экипаж, тем более детальную ориентировку он может вести. Понятно, что на карту крупного масштаба можно нанести больше объектов и более мелких, поэтому вести по ней визуальную ориентировку легче.

Часто размеры важных для аэронавигации объектов слишком малы, чтобы нанести их на карту в соответствии с их натуральными размерами. В этом случае их заменяют условными знаками. При выборе условных знаков стараются, чтобы они были по возможности унифицированными для разных видов карт, а с другой стороны, по своему виду ассоциировались с обозначаемыми объектами - это облегчит их запоминание и опознание.

3. *Координатная* функция карты обеспечивает возможность численного определения координат (широты и долготы) точек на карте - места самолета и других объектов. Для этого, как правило, используется координатная сетка, которая чаще всего имеет вид меридианов и параллелей (картографическая сетка), но иногда вместо нее нанесена сетка прямоугольных координат Гаусса-Крюгера (километровая сетка) На некоторых видах карт, охватывающих небольшую территорию, сетка не

наносится, а вместо нее на обресе карты нанесены градусные деления широты и долготы. Точность определения координат по карте зависит от ее масштаба и от того, через сколько градусов (минут, секунд) нанесены меридианы и параллели, имеются ли на них минутные деления.

4. *Измерительная* функция карты позволяет извлекать из карты информацию, которая в явном виде на карте не нанесена: определять расстояния и направления между любыми точками с помощью масштабной линейки и транспортира, прокладывать линии положения для определения места самолета и т.д. Несмотря на то, что любая карта имеет искажения, погрешности при таких измерениях возникают в основном из-за неточности графической работы на карте (неточно приложил линейку или транспортир и т.д.). Для аэронавигационных карт используются такие виды проекций, которые, как правило, сводят искажения расстояний и углов к минимальным значениям, которыми на практике можно пренебречь.

Измерительная функция карты одна из самых древних в аэронавигации и используется при выполнении графического счисления пути (прокладки), при определении места самолета с помощью радионавигационных средств, при измерении заданных путевых углов и расстояний и т.д.

5. *Информационная* функция аэронавигационной карты связана с нанесением на ней специальной (аэронавигационной) информации. Название этой функции, конечно, является условным и не совсем точным. Ведь и другие вышеперечисленные функции обеспечивают получение определенных видов информации. Здесь идет речь о том, что карта является носителем информации, которая в принципе может быть приведена (и действительно приводится!) в других источниках: Сборниках аэронавигационной информации, Перечне воздушных трасс и т.д. Но привязка этой информации к карте повышает оперативность ее использования экипажем, уменьшает вероятность ошибок, делает представление информации более компактным.

Конечно, границы района полетной информации могут быть заданы в виде таблицы с координатами точек, но нанесение этих границ на карту не только делает эту информацию более наглядной, но и позволяет решать дополнительные задачи. Например, найти точку пересечения маршрута с этой границей или найти ближайшие к самолету навигационные средства.

Роль и значение перечисленных пяти функций аэронавигационной карты менялись на протяжении развития авиации. Пока навигация в значительной степени была визуальной, большее значение имели географическая и координатная функции. Для реализации этих функций на карту наносилось большое количество географических объектов, позволяющих вести ориентировку. С появлением угломерных и дальномерных навигационных средств важное значение приобрела измерительная функция. От карты требовалась минимизировать искажения расстояний и углов, чтобы обеспечить точное определение места самолета путем графических построений на карте.

Но в последние десятилетия, с внедрением автоматизированных навигационных систем и пилотажно-навигационных комплексов, на первый план выступила роль карты как источника аэронавигационной информации, то есть ее информационная функция. Карта для полетов по приборам уже не требует подробной географической нагрузки. Она превращается в документ аэронавигационной информации, в котором эта информация наложена на карту, упорядочена на ней в соответствии с географическим расположением объектов, к которым она относится. Сама карта становится второстепенной, являясь лишь ее носителем.

Можно провести сравнение со схемой линий метрополитена, вывешиваемой в вагонах. Хотя на ней и нанесены элементы географической нагрузки (например, протекающие через город крупные реки), но не они являются на схеме главными и поэтому могут быть нанесены схематично, с искажениями. Главное - последовательность станций, топология линий метро. Разумеется, в отличие от этого примера географическая нагрузка на аэронавигационной карте, хотя и представлена в небольшом количестве, но нанесена точно в соответствии с проекцией карты, что обеспечивает возможность определения координат и выполнения измерений.

При разработке карты учитывается, для каких целей она будет использоваться, поэтому разные виды карт в разной степени предназначены для реализации перечисленных функций.

Например, аэронавигационные карты в международной проекции («двадцати- и десятикилометровки») имеют богатую географическую нагрузку, но на них практически нет аэронавигационной информации. А карты вылета в сборниках аэронавигационной информации не содержат географических объектов и выполнены не в масштабе - они выполняют только опорно-ориентировочную и информационную функции.

6. ВРЕМЯ И УСЛОВИЯ ЕСТЕСТВЕННОГО ОСВЕЩЕНИЯ

6.1. Небесная сфера

В древности людям, наблюдавшим за небесными светилами, казалось, что они закреплены на небесной сфере, за которой спрятаны механизмы, приводящие светила в движение. Дано известно, что это не так. Все светила находятся на разных и очень больших расстояниях от Земли и движутся самостоятельно по законам небесной механики. Но понятие условной небесной сферы, на которой якобы находятся светила, оказалось очень удобным для решения астрономических задач.

Небесная сфера – воображаемая сфера произвольного радиуса, центром которой является наблюдатель.

На небесной сфере производятся только угловые измерения, поэтому радиус небесной сферы не имеет значения. Также не имеет значения, в какой

точке Земли находится наблюдатель. Небесные светила находятся так далеко, что при наблюдении из любой точки расположение светил выглядит одинаковым. Единственным исключением является самое близкое небесное тело – Луна. При перемещении наблюдателя в другую точку Земли видимое положение Луны испытывает заметное угловое смещение (так называемый *параллакс Луны*), которое при необходимости можно учесть.

Земля вращается вокруг своей оси, но наблюдателю она кажется неподвижной. Ему кажется, что вращается небесная сфера. Ось вращения небесной сферы называется *осью мира*. Очевидно, что ее направление в пространстве совпадает с направлением оси вращения Земли.

Точки пересечения оси мира с небесной сферой называются *полюсами Мира* – северным P_N и южным P_S (рис. 6.1).

Зенит Z – точка на небесной сфере, расположенная по вертикали над головой наблюдателя. Противоположная ей точка на сфере Z' называется *надир*.

Истинный горизонт – большой круг на небесной сфере, плоскость которого перпендикулярна вертикальной линии. Примерно он соответствует видимому горизонту на открытой местности.

Небесный меридиан – большой круг, проходящий через полюсы мира, зенит и надир (круг P_N, P_S, Z, Z' на рис. 6.1).

В отличие от земных меридианов, которых бесконечно много, *небесный меридиан для данного наблюдателя только один*. Его плоскость совпадает с плоскостью земного меридиана, на котором находится наблюдатель. Вместе с небесной сферой небесный меридиан не вращается – ведь направления на зенит (то есть вверх) и на полюс мира одни и те же в любое время суток.

Небесный экватор – большой круг на небесной сфере, перпендикулярный оси мира. Плоскость небесного экватора совпадает с плоскостью экватора Земли. Вообще, большие круги на небесной сфере являются как бы отражением или продолжением аналогичных больших кругов на Земле.

Небесный меридиан пересекает истинный горизонт в точках севера N и юга S , а небесный экватор – в точках востока E и запада W .

Полуденной линией называется линия в горизонтальной плоскости, соединяющая точки N и S .

Вертикал – большой круг на небесной сфере, проходящий через зенит и данную точку небесной сферы (например, светило). Нетрудно понять, что его плоскость перпендикулярна плоскости горизонта, то есть расположена вертикально.

Круг склонения (он же – *часовой круг*) – большой круг, проходящий через полюсы мира и данную точку (светило). Если сопоставить Землю и небесную сферу, земные и небесные полюсы и экваторы, то круги склонения аналогичны земным меридианам

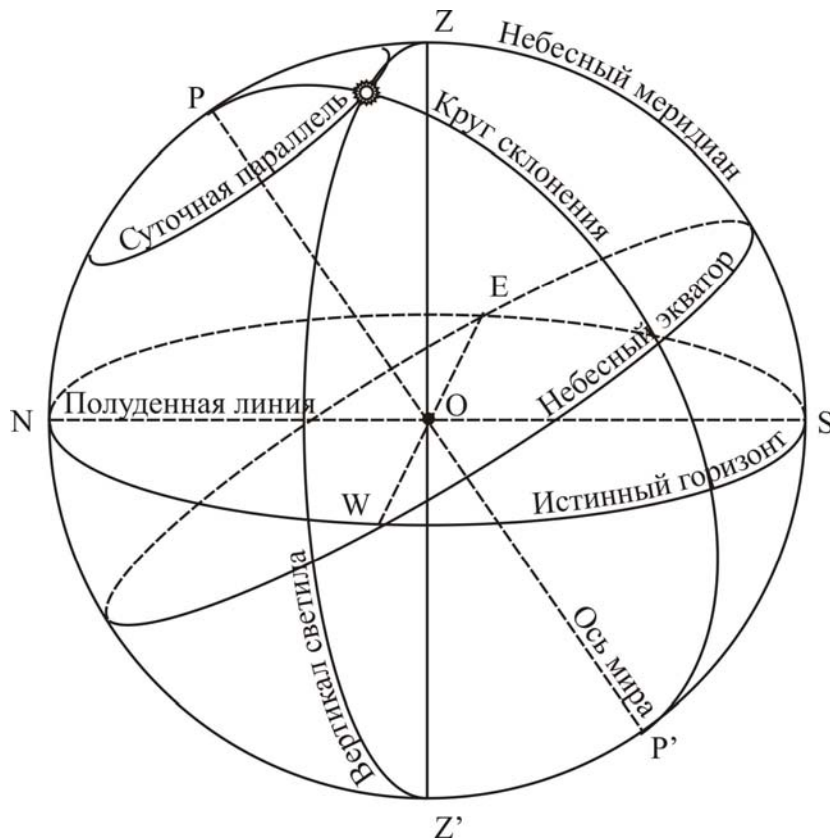


Рис. 6.1. Небесная сфера

Малые круги, параллельные экватору, называются *суточными параллелями*. Название объясняется тем, что они аналогичны земным параллелям и являются траекториями, по которым в течение суток перемещаются светила вследствие вращения небесной сферы.

Малые круги, параллельные горизонту, называются *альмукантаратами*.

Из-за движения Земли по орбите вокруг Солнца, Солнце проектируется в разные точки небесной сферы и в течение года описывает большой круг, называемый *эклиптикой*. Плоскость эклиптики наклонена к экватору примерно на $23^{\circ}27'$. Поскольку годовое движение Солнца по небесной сфере является отражением движения Земли по своей орбите, плоскость эклиптики это и есть плоскость орбиты Земли.

Точки пересечения экватора и эклиптики называются *точками весеннего и осеннего равноденствий*. Эти точки занимают среди звезд фиксированное положение и вращаются вместе с небесной сферой.

Точка весеннего равноденствия обозначается знаком Υ , который астрономы присвоили созвездию Овна, а осеннего равноденствия – знаком $\ Libra$ (созвездие Весы). Две тысячи лет назад, когда древние греки ввели упомянутые обозначения, эти точки находились в данных созвездиях. В настоящее время из-за прецессии земной оси сместились примерно на 20° и находятся в созвездиях соответственно Рыб и Девы.

6.2. Системы небесных координат

Местоположение любой точки на небесной сфере, в том числе, светил, характеризуется небесными координатами. Здесь будут рассмотрены три системы координат.

1) *Горизонтальная система координат*. Координатами являются высота h и азимут A светила (рис.6.2).

Высота (h) – угол между плоскостью истинного горизонта и направлением на светило. Отсчитывается от 0° до $\pm 90^\circ$, знак плюс соответствует направлению вверх. Зенит имеет высоту $+90^\circ$, надир -90° , точки на линии истинного горизонта имеют нулевую высоту.

Вместо высоты иногда используют другую, жестко связанную с ней координату – *зенитное расстояние* z , которое является дополнением h до 90° :

$$z = 90^\circ - h.$$

Зенитное расстояние отсчитывается от 0° (в зените) до 180° (в надире).

Азимут (A) – угол в плоскости истинного горизонта между северным направлением полуденной линии и плоскостью вертикала светила. Отсчитывается от 0° до 360° от северного направления на восток. По сути азимут в горизонтальной небесной СК полностью соответствует азимуту (пеленгу), используемому в навигации.

Система координат называется горизонтальной, поскольку опорной плоскостью является плоскость истинного горизонта.

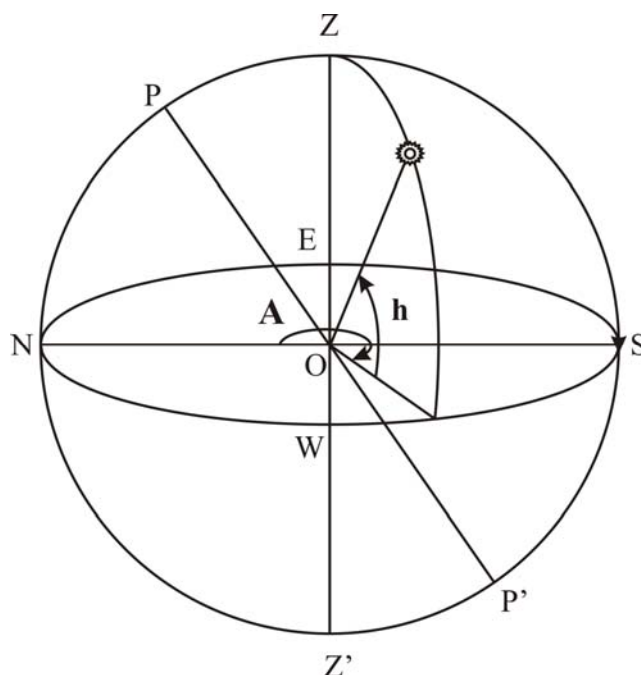


Рис. 6.2. Горизонтальная система небесных координат

Эта система координат является вполне наглядной. Если указать азимут и высоту светила, легко, сориентировавшись на местности, определить направление на светило в пространстве. Но из-за вращения небесной сферы высоты и азимуты всех светил в течение суток непрерывно меняются, причем с неравномерной скоростью. Наблюдая, например, за движением Солнца в течение дня, можно видеть, что после восхода его высота быстро увеличивается, а азимут растет медленно. Когда Солнце на юге и движется почти параллельно горизонту, высота изменяется медленно, а азимут быстро возрастает. Поэтому невозможно издать каталоги звезд, не говоря уже о планетах, с их горизонтальными координатами – они в каждый момент разные.

2) *Первая экваториальная система координат*: Координатами являются склонение δ и часовой угол t . Здесь основной плоскостью является плоскость небесного экватора (рис. 6.3).

Склонение светила (δ) – угол между плоскостью небесного экватора и направлением на светило. Измеряется аналогично высоте (от -90° до $+90^\circ$), но не от горизонта, а от экватора. Если проводить аналогию с координатами точек на земной поверхности, то склонение аналогично широте.

Часовой угол (t) – это двугранный угол между южной частью плоскости небесного меридиана и плоскостью круга склонения светила. Отсчитывается на запад (по направлению суточного вращения небесной сферы) от 0° до 360° . На рис. 6.3. этот угол показан в плоскости экватора.

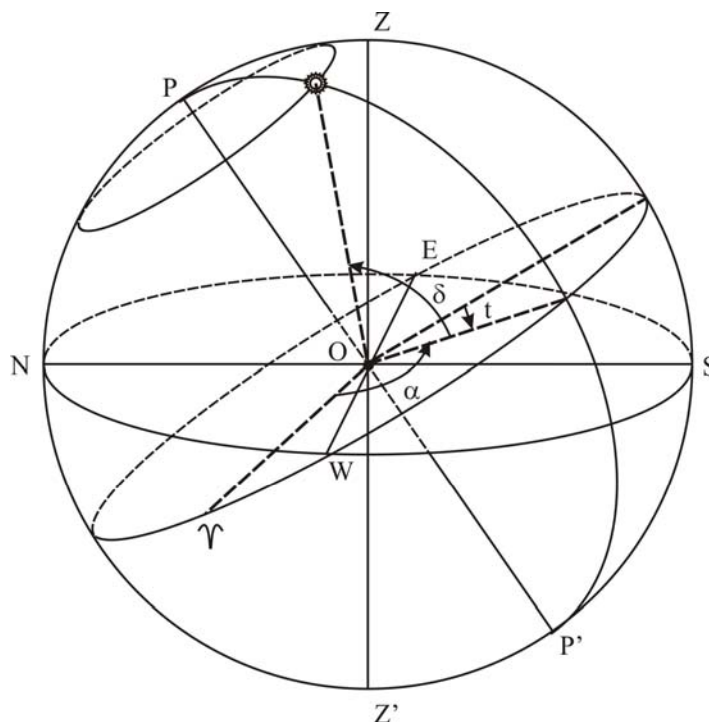


Рис. 6.3.. Первая и вторая экваториальные системы небесных координат

При суточном вращении небесной сферы звезды движутся по суточным параллелям и их склонение останется неизменным, а часовой угол равномерно растет.

В один и тот же момент времени часовые углы одного и того же светила для двух наблюдателей различны, поскольку каждый из них отсчитывает часовой угол от своего небесного меридиана. Плоскость небесного меридиана каждого наблюдателя совпадает с плоскостью земного меридиана, на котором расположен наблюдатель. Поэтому в один и тот же момент времени разность часовых углов одного и того же светила для двух наблюдателей равна разности их долгот (рис. 6.4).

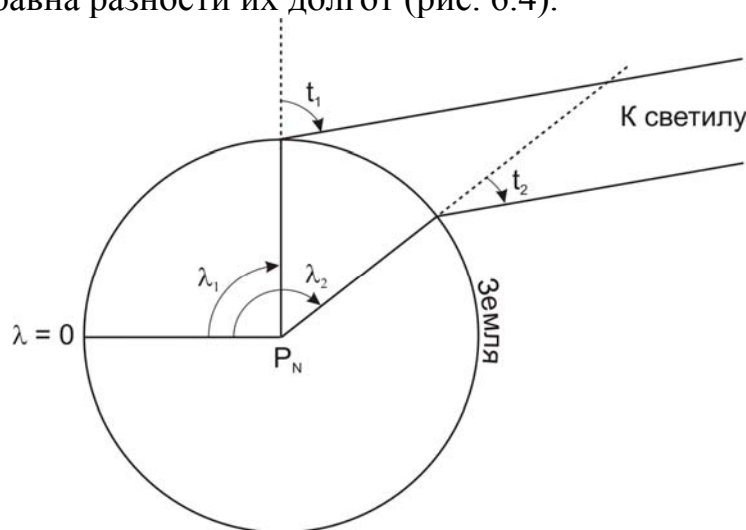


Рис. 6.4. Разность часовых углов

Таким образом, *разность часовых углов равна разности долгот*:

$$t_2 - t_1 = \lambda_2 - \lambda_1.$$

Часовой угол светила для наблюдателя на гринвичском меридиане называется *гринвичским часовым углом* t_{cp} . Поскольку на гринвичском меридиане $\lambda = 0$, он связан с часовым углом t на любом другом меридиане с долготой λ простым соотношением

$$t = t_{cp} + \lambda.$$

Здесь, как обычно, восточная долгота подразумевается со знаком плюс.

3) *Вторая экваториальная система координат*. Координатами являются склонение δ (то же самое, что в первой экваториальной системе) и прямое восхождение α .

Прямое восхождение (α) – двугранный угол между плоскостями круга склонения точки весеннего равноденствия Υ и круга склонения светила. На рис. 6.3 этот двугранный угол показан в плоскости небесного экватора.

Прямое восхождение отсчитывается от Υ на восток от 0° до 360° , то есть против направления суточного вращения небесной сферы.

Поскольку и светило, и точка весеннего равноденствия со своими кругами склонений вращаются вместе с небесной сферой, угол между ними остается неизменным. Таким образом, во второй экваториальной СК координаты звезд в течение суток не меняются. Это не относится к Солнцу, Луне и планетам, поскольку они сами перемещаются по небесной сфере среди звезд. Поэтому координаты звезд в астрономических справочниках приводятся в виде δ и α . Однако, и у звезд эти координаты медленно меняются из-за прецессии и нутации. Поэтому в звездных каталогах всегда указано на какую дату (эпоху) приведены координаты. Определить их текущее значение можно путем ввода соответствующих поправок.

6.3. Высота полюса мира

Для наблюдателей на разных широтах Земли полюс мира P расположен на небесной сфере по-разному.

На рис. 6.5 изображен земной шар, в точке A которого на широте φ расположен наблюдатель. Направление на зенит («вверх») для этого наблюдателя проходит по радиусу Земли от ее центра, а направление на полюс мира – в направлении по оси вращения Земли. Горизонтальная плоскость для данного наблюдателя перпендикулярна его вертикальной линии.

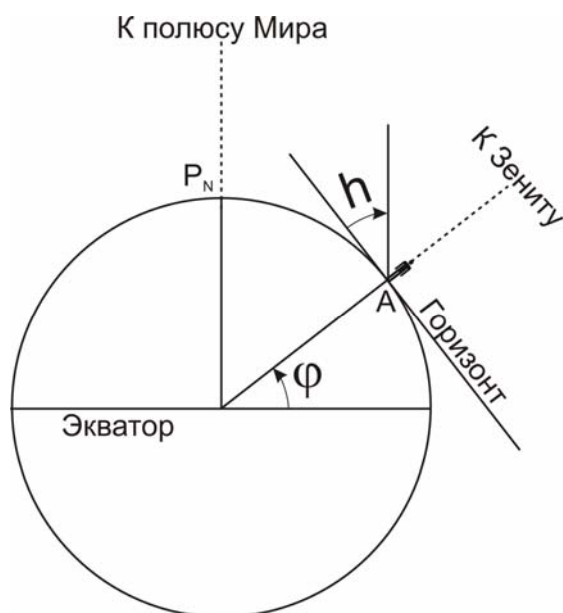


Рис. 6.5. К определению высоты полюса мира

Высота полюса мира h – это угол между горизонтальной плоскостью наблюдателя и направлением на полюс.

Из рис. 6.5 видно, что углы h и φ - это углы со взаимно перпендикулярными сторонами, следовательно они равны.

Таким образом, получен важный и полезный вывод: *высота полюса мира равна широте наблюдателя.*

Например, в Санкт-Петербурге ($\varphi=60^\circ$) полюс находится на высоте 60° над горизонтом. Для наблюдателя на Северном полюсе Земли полюс мира находится в зените, а для наблюдателя на экваторе он лежит в плоскости истинного горизонта.

Очевидно, что плоскость небесного экватора наклонена к плоскости горизонта на угол $(90^\circ - \varphi)$, поскольку плоскость экватора перпендикулярна к оси мира.

Так как северный полюс мира находится в направлении на север от наблюдателя, то наивысшая над горизонтом точка экватора расположена в направлении на юг (для наблюдателя, находящегося в северном полушарии Земли).

6.4. Параллактический треугольник

Параллактическим треугольником называется сферический треугольник на небесной сфере, вершинами которого является полюс мира P , зенит Z и светило M (рис. 6.6).

Значение параллактического треугольника для навигации обусловлено тем, что в его элементах (сторонах и углах) скрыты как небесные координаты светила, так и географические координаты наблюдателя.

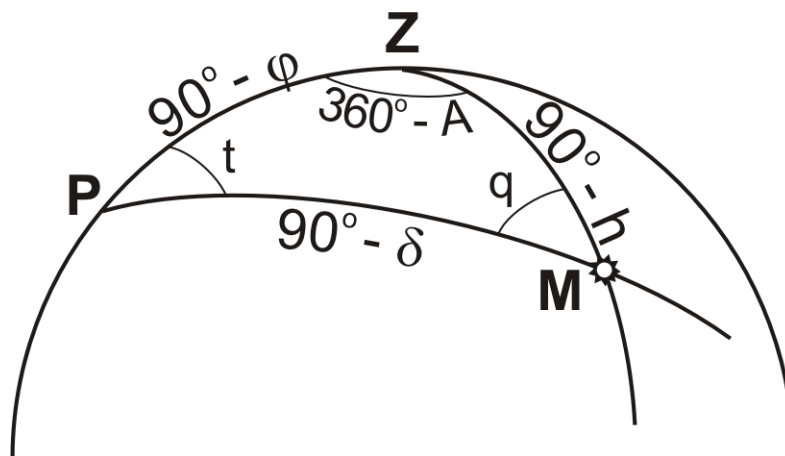


Рис. 6.6. Параллактический треугольник

Рассмотрим элементы параллактического треугольника $\triangle PZM$.

Поскольку высота полюса мира равна широте наблюдателя, а угол между полюсом и экватором 90° , то сторона $PZ=90^\circ-\varphi$.

Сторона ZM – это зенитное расстояние светила, то есть $ZM=z=90^\circ-h$.

Аналогично, сторона $PM=90^\circ-\delta$.

Угол параллактического треугольника при вершине P есть ни что иное как часовой угол t (между плоскостями небесного меридиана и круга склонения светила). А поскольку, как было показано выше, $t = t_{zp} + \lambda$, в этой величине «спрятана» долгота наблюдателя.

Угол при вершине Z равен $(360^\circ - A)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно проследить, какой дуге в плоскости горизонта он соответствует.

Угол рассматриваемого треугольника при вершине M (светило) никакого интересного смысла не имеет и называется параллактическим углом q .

Параллактический треугольник может использоваться для различных авиационных задач, в частности, для нахождения географических координат наблюдателя (φ , λ) по измеренным приборами небесным координатам светила.. Как и из любого сферического треугольника, из параллактического треугольника по формулам сферической тригонометрии могут быть получены различные полезные соотношения, например, по формуле косинуса стороны можно получить соотношение

$$\sinh = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t,$$

которое понадобится в дальнейшем.

6.5. Видимое движение небесных светил

Все небесные светила, в том числе так называемые неподвижные звезды, участвуют в суточном вращении небесной сферы, перемещаясь по своим суточным параллелям. Солнце, Луна и планеты, кроме того, еще и перемещаются относительно звезд. Это является следствием того, что как планеты, так и Земля, движутся по своим орбитам.

Все светила дважды в сутки пересекают небесный меридиан. Моменты времени, когда это происходит, называются *кульминациями светил*. В один из этих моментов высота светила максимальна (верхняя кульминация), а в другой – минимальна (нижняя кульминация). Моменты верхней и нижней кульминации Солнца называют соответственно *полуднем* и *полночью*. Для наблюдателя в северном полушарии Земли Солнце в полдень пересекает южную часть небесного меридиана (часовой угол равен нулю), а в полночь – северную.

В средних и экваториальных широтах большая часть светил в течение суток восходит и заходит. В северном полушарии Земли, если склонение светила $\delta > (90^\circ - \varphi)$, то оно не заходит и круглые сутки остается над горизонтом. Если же $\delta < - (90^\circ - \varphi)$, то светило не восходит, совершая движение по суточной параллели ниже плоскости горизонта (рис. 6.7).

Солнце, помимо суточного движения, в течение года совершает оборот по эклиптике, перемещаясь по ней примерно на 1° за сутки (в году 365 дней, а в окружности 360°) навстречу своему суточному движению. Считается, что за год Солнце проходит через 12 созвездий, называемых созвездиями Зодиака: Овен, Телец, Близнецы, Рак, Лев, Дева, Весы, Скорпион, Стрелец, Козерог, Водолей, Рыбы. Так и было во времена древних греков, которые придумали эти названия. Но современные астрономы по-новому провели границы между созвездиями и теперь между созвездиями Скорпиона и Стрельца Солнце еще проходит и созвездие Змееносца. Кроме того, как уже отмечалось, из-за прецессии земной оси со времен древних греков эклиптика сдвинулась примерно на 20° и теперь Солнце в указанных созвездиях находится не в те месяцы, которые им по-прежнему приписывают астрологи.

В любой день года над головой наблюдателя в течение суток проходят одни и те же звезды. Но на той части небесной сферы, на которой в данный день находится Солнце, наблюдать звезды невозможно из-за рассеивания солнечного света атмосферой – днем звезды не видны. Поэтому ночью в разное время года видны разные созвездия – те, которые на противоположной стороне от Солнца.

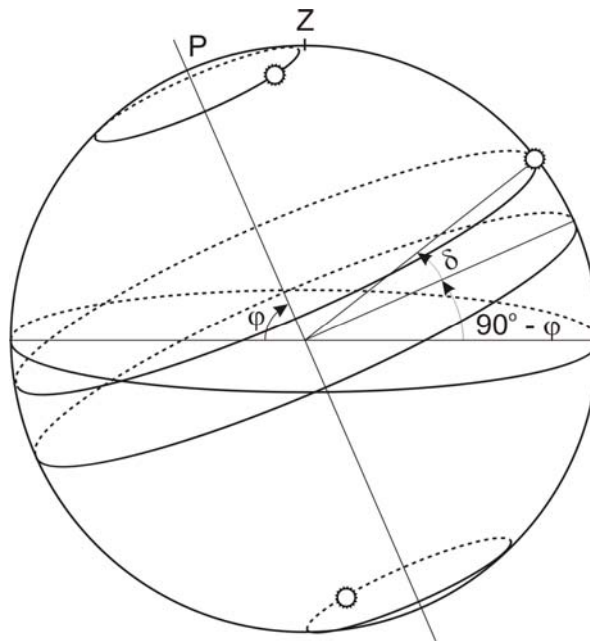


Рис. 6.7. Суточное движение светил

Эклиптика наклонена к небесному экватору примерно на $23,5^\circ$, поэтому склонение Солнца (его угловое расстояние от экватора) в течение года меняется в пределах $\pm 23,5^\circ$. Экватор в свою очередь наклонен к горизонту на угол $(90^\circ - \varphi)$. Следовательно, Солнце выше всего над горизонтом в полдень того дня, когда оно выше всего над экватором (примерно 22 июня, день летнего солнцестояния). Высота Солнца в полдень

любого дня $h=(90^\circ-\varphi)+\delta$ (рис. 6.8). В день летнего солнцестояния $\delta=+23,5^\circ$. Поэтому, например, в Санкт-Петербурге ($\varphi=60^\circ$) Солнце никогда не поднимается выше

$$h=(90^\circ-60^\circ)+23,5=53,5^\circ.$$

В полночь дня летнего солнцестояния склонение Солнца остается таким же (если пренебречь его незначительным изменением за полсуток от полудня до полуночи). Но в северной части небесной сферы экватор наклонен под горизонт на $(90^\circ-\varphi)$, поэтому высота Солнца в полночь, когда оно пересекает северную часть небесного меридиана, составляет

$$h=-(90^\circ-60^\circ)+23,5=-6,5^\circ.$$

Таким образом, в Санкт-Петербурге летом Солнце не опускается глубоко под горизонт, поэтому и наблюдаются «белые ночи». Разумеется, это относится ко всем пунктам на таких же и более северных широтах.

А в полдень дня зимнего солнцестояния (примерно 23 декабря), когда склонение минимально, $h=(90^\circ-60^\circ)-23,5=6,5^\circ$. Солнце восходит в южной части неба, поднимается на указанную высоту и вскоре заходит. День короткий, ночь длинная и Солнце своими косыми лучами не успевает прогреть местность

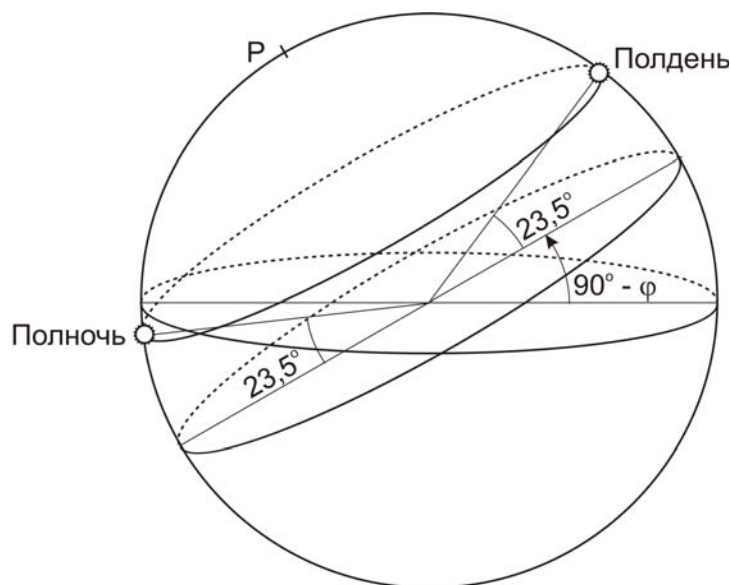


Рис. 6.8. Положение Солнца в полдень и в полночь

6.6. Измерение времени

Время как часовой угол. С практической точки зрения понятие «время» используется в двух несколько различных смыслах.

Во-первых, под «временем» может пониматься *интервал времени* между какими-либо событиями: взлетом и посадкой, пролетом двух пунктов и т.п. Для измерения интервала времени достаточно иметь какой-либо

источник периодического процесса (например, колеблющийся маятник). Тогда можно подсчитать, сколько колебаний уложилось в данный интервал времени, тем самым и измерив этот интервал. Этот аспект времени будет рассмотрен в ниже.

Во-вторых, время можно рассматривать как бесконечную *шкалу*, на которой каждое событие находит свое место. Наряду с тремя пространственными координатами время можно рассматривать как четвертую, хотя и специфическую, координату, позволяющую определить не только *где*, но и *когда* произошло то или иное событие. Но тогда возникает вопрос: где начало отсчета на этой шкале и каким образом она отградуирована? Этому и посвящен данный параграф.

Время как координатная шкала исторически связано с движением небесных светил, то есть вращением Земли вокруг своей оси. Это один из первых периодических процессов, обнаруженных древними людьми.

Сутки – это период обращения Земли вокруг своей оси относительно какой-либо точки на небесной сфере. Например, интервал времени между двумя последовательными одноименными (либо верхними, либо нижними) кульминациями светила.

Но в зависимости от того, относительно какой точки (светила) рассматривать период обращения, продолжительность суток будет разная. Если взять любую звезду, то продолжительность таких суток составит примерно 23 ч 56 мин 04с. Если измерять период обращения относительно Солнца, то он составит, конечно, ровно 24 часа (потому что 1 час по определению это $1/24$ часть солнечных суток). Различие в продолжительности солнечных и звездных суток вызвано тем, что Солнце перемещается среди звезд. Например, если в начале суток направление на звезду и Солнце совпадало, то в начале следующих суток эти направления будут различными, поскольку Земля переместилась в другую точку орбиты.

Для создания непрерывной шкалы времени на протяжении суток каждому моменту должно быть сопоставлено некоторое количественное значение, которое мы и называем временем суток. Ключевым в понимании того, как установлено это соответствие, является следующее утверждение.

Время- это часовой угол определенной точки на небесной сфере (например, какого-то светила). Все остальное, рассматриваемое в данном параграфе, это развитие, подробности и модификации данного положения.

Первый естественным образом возникающий вопрос – каким образом время можно измерять углом? Ведь мы привыкли измерять его часами и минутами времени, а углы измеряются совсем в других единицах – градусах, угловых минутах и секундах, или в радианах. Этот вопрос решается легко. Между данными двумя шкалами, угловой и временной, имеется однозначное соответствие. Оборот Земли на 360° соответствует 24 часам. Следовательно, 1 час времени эквивалентен угловым 15° , а 1° угла равен 4 минутам времени. Нетрудно и дальше продолжить такое соответствие (1 минута времени равна $15'$ угла и т.д.).

Обе шкалы совершенно равноценны. Даже на звездных картах прямое восхождение (угол) часто указывают во временной мере, например, «7 час», что эквивалентно 105° .

Второй вопрос – часовой угол какой именно точки имеется в виду? Это вопрос условной договоренности. Можно, например, взять любую звезду. Но, чтобы никакой звезде не было «обидно», берут не звезду, а точку весеннего равноденствия, которая имеет вполне фиксированное положение на небесной сфере среди звезд. Такое время называется звездным временем.

Звездное время s измеряется часовым углом точки весеннего равноденствия γ .

$$s = t_\gamma$$

Непосредственно измерить звездное время с помощью астрономических инструментов, конечно, невозможно – ведь в точке весеннего равноденствия нет никакой достаточно яркой звезды. Но можно поступить по другому. Из рис. 6.9 можно видеть, что в любой момент времени

$$s = t_\gamma = t + \alpha,$$

где t – часовой угол любой звезды в данный момент времени (его можно измерить астрономическими приборами), а α – ее прямое восхождение (приведено в каталоге звезд).

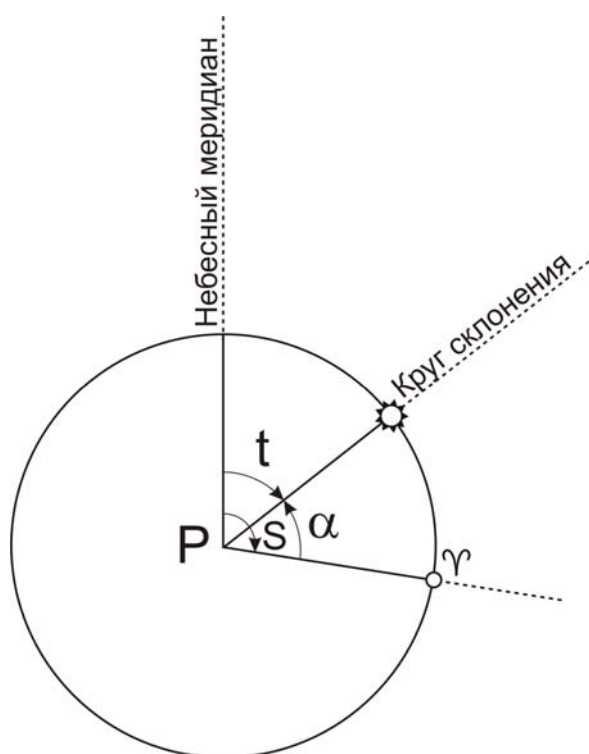


Рис. 6.9. К определению звездного времени

Проще всего зафиксировать момент прохождения какой-либо звезды через южную часть небесного меридиана ($t=0$) с помощью специального телескопа (зенитной трубы), зафиксированной в его плоскости. В этот момент звездное время будет равно прямому восхождению звезды.

Звездное время широко используется в астрономии, но в обыденной жизни оно неудобно, поскольку не соответствует условиям естественного освещения. Ведь Солнце движется среди звезд. Например, если в какой-то день в 6 час по звездному времени вошло Солнце, то на следующий день в этот же момент звездного времени оно еще не взойдет (взойдет примерно через 4 мин). Такой сдвиг будет происходить ежедневно и через несколько месяцев 6 час звездного времени придутся на полночь, затем на вечер и т.д. Жить по такому времени неудобно.

В связи с этим используется *солнечное время*, то есть, время, измеряемое часовым углом Солнца. Но и здесь возникают проблемы. Если использовать реальное видимое на небе Солнце (астрономы называют его *истинным Солнцем*), то оказывается, что время будет неравномерным – в разное время года сутки будут то короче, то длиннее. Это вызвано двумя основными причинами.

Первая заключается в том, что Солнце перемещается в течение года по эклиптике с разной скоростью, потому что скорость движения Земли по эллиптической орбите зависит от удаления от Солнца. Чем ближе к Солнцу, тем по законам небесной механики быстрее она перемещается.

Вторая причина вызвана тем, что часовой угол измеряется вдоль небесного экватора, а Солнце движется по наклоненной к нему эклиптике. Зимой и летом оно перемещается примерно параллельно к экватору, а весной и осенью под максимальным углом. На рис. 6.10 изображены развернутые на плоскость небесный экватор и эклиптика.

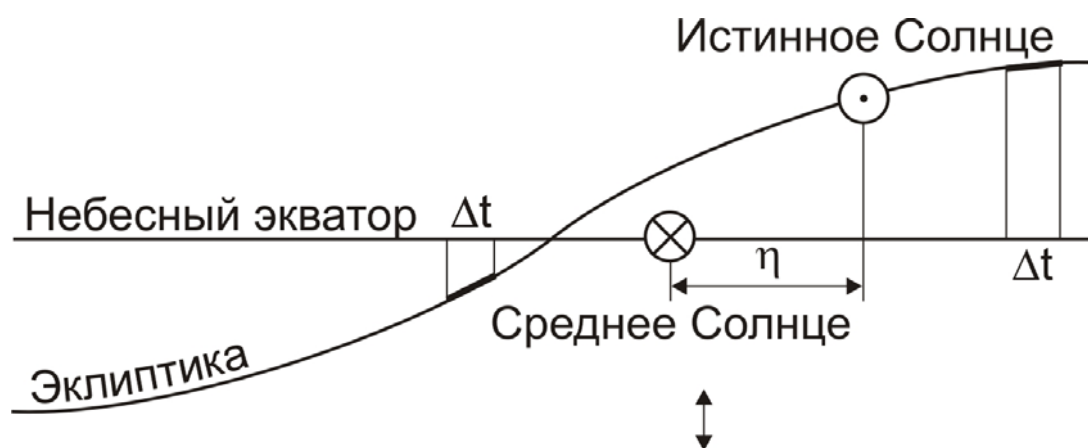


Рис. 6.10. Истинное и среднее Солнца

Даже если бы истинное Солнце двигалось по эклиптике равномерно, то его перемещение за сутки в проекции на экватор, было бы различным в разное время года.

Таким образом, истинное солнечное время, измеряемое часовым углом истинного Солнца, является неравномерным и использовать его неудобно. Пришлось бы конструировать часы, которые ходили бы с разной скоростью в разное время года.

По этой причине вместо истинного используют *среднее солнечное время*, измеряемое часовым углом среднего Солнца.

Среднее Солнце – условная точка на небесной сфере, которая в течение года равномерно перемещается по небесному экватору и совершает полный оборот за то же время, что и истинное Солнце. Таким образом, избавляются от обоих недостатков: в отличие от истинного среднее Солнце движется по экватору с постоянной скоростью.

Разумеется, истинное и среднее солнечные времена не совпадают. В какое-то время года среднее время больше, а в какое-то меньше истинного. Разность среднего и истинного солнечных времен называется *уравнением времени* η .

$$\eta = t_{cp} - t_{ист} .$$

Несмотря на свое название («уравнение») – это просто величина, измеряемая в минутах времени и принимающая разные значения на протяжении года – примерно от -17 мин до +15 мин. График изменения η в основном представляет сумму двух синусоид. Одна из них вызвана неравномерностью движения Земли по орбите, а вторая – наклоном эклиптики к небесному экватору. Точный расчет уравнения времени может быть выполнен с учетом и других факторов (особенностей календаря, прецессии и т.д.), но полные формулы достаточно громоздки. Номограмма на рис. 6.11 позволяет определить склонение Солнца и уравнение времени в любой день года. На номограмме нанесены осредненные за период с 2010 г. по 2019 г. значения этих величин.

Очевидно, что, зная уравнение времени для данного дня года, можно определить среднее солнечное время по известному истинному:

$$t_{cp} = t_{ист} + \eta .$$

Следует иметь в виду, что в некоторых учебных и научных изданиях уравнение времени используется с противоположным знаком, то есть как разность истинного и среднего времен. В этом случае соответственно меняется знак перед η в вышеприведенной формуле.

Поскольку часовой угол всегда отсчитывается от южной части небесного меридиана, часовой угол Солнца (а это и есть солнечное время) равен нулю в полдень. То, что начало суток (00 час 00 мин) приходится на середину дня, для научных астрономических целей не имеет значения, но неудобно в обыденной жизни.

Время измеряемое от полудня называется *астрономическим временем*. Оно полностью совпадает с часовым углом Солнца, выраженным в единицах

времени, и поэтому и обозначается буквой t , соответствующей часовому углу.

Более широко используется *гражданское время*, обозначаемое буквой T , которое отличается от астрономического времени t ровно на 12 час, то есть отличается от часового угла на 180° . Начало суток приходится в этом случае на полночь (момент пересечения Солнцем северной части небесного меридиана).

$$T = t \pm 12 \text{ час} = t \pm 180^\circ.$$

Таким образом, время, которым мы пользуемся в реальной жизни – это *гражданское среднее солнечное время*. Солнечное – потому что измеряется часовым углом Солнца. Среднее – потому что речь идет не об истинном, а о среднем Солнце. Гражданское – означает, что часовой угол сдвинут (развернут) на 12 час (180°), то есть начало суток в полдень.

Но имеется еще одна проблема. Часовой угол отсчитывается от плоскости небесного меридиана, которая совпадает с плоскостью земного меридиана наблюдателя. Поэтому для наблюдателей на разных меридианах в один и тот же момент часовой угол Солнца, а, следовательно, и время, будет различным. Получается, что на каждом меридиане свое время – его называют *местным временем*. Поскольку разность часовых углов равна разности долгот наблюдателей, то

$$T_2 - T_1 = t_2 - t_1 = \lambda_2 - \lambda_1. \quad (6.1)$$

То есть, *разность местных времен* (как гражданских, так и астрономических) *равна разности долгот наблюдателей*.

Например, если разность долгот двух наблюдателей составляет 3° , то, учитывая, что 1 угловой градус соответствует 4 минутам времени, местные времена этих наблюдателей будут различаться на 12 минут.

Такое время называется местным, поскольку оно свое на каждом меридиане, которых, конечно, бесконечно много. Даже если отступить на один шаг к востоку или западу, местное время изменится. Когда нужно подчеркнуть, что речь идет именно о *местном* гражданском времени, будем обозначать его T_m .

Следует учитывать, что в обыденной жизни (в том числе, в авиации) местным временем (local time, LT) обычно называют время, по которому живет население данной местности. В плане научной терминологии это не корректно. На самом деле такое время является не местным (в рассмотренном выше строго научном смысле), а, как правило, поясным временем.

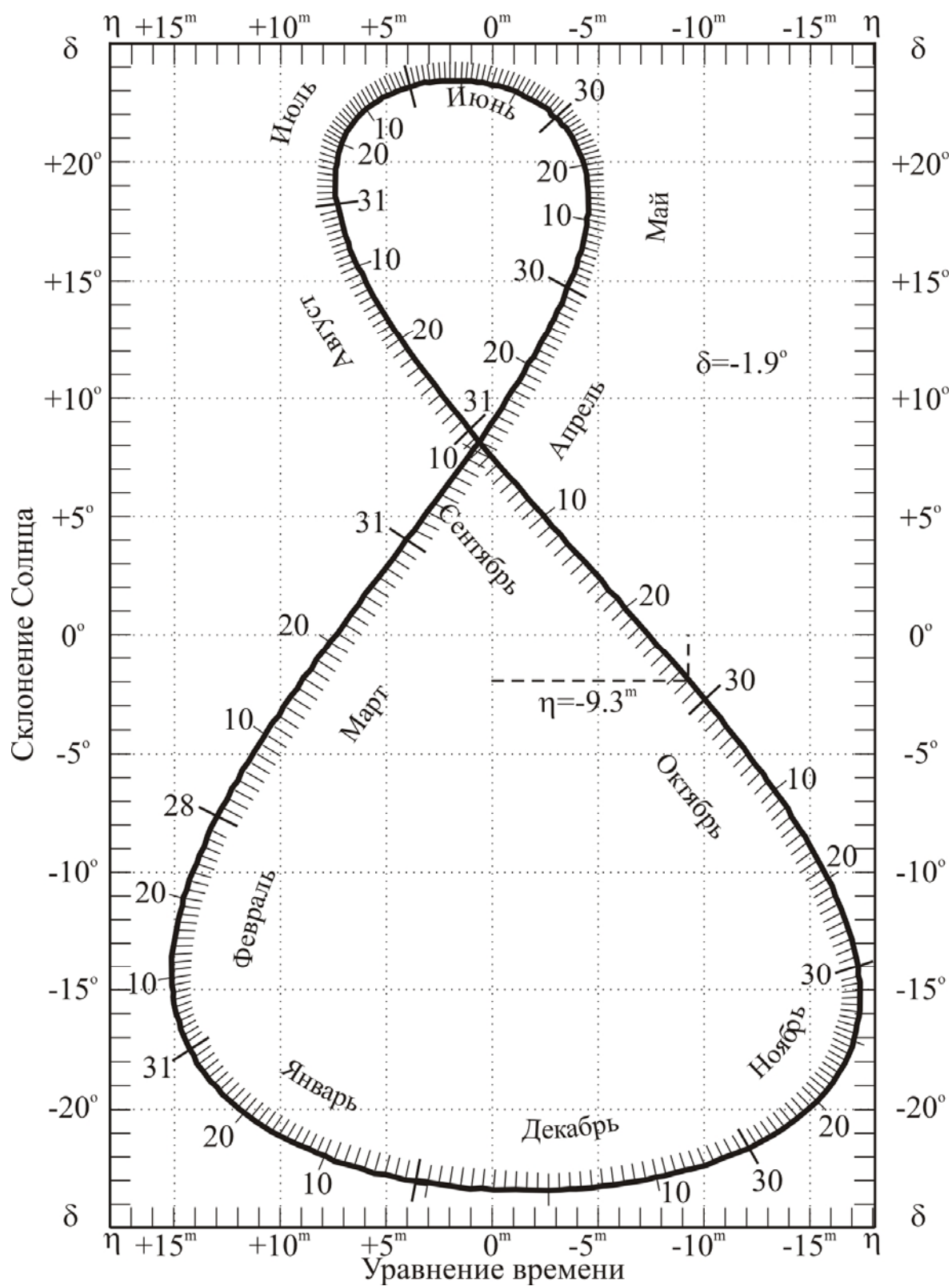


Рис. 6.11. Номограмма для определения склонения солнца и уравнения времени

Местное время на гринвичском меридиане получило название *гринвичского времени*. Поскольку долгота гринвичского меридиана равна нулю, то из формулы (6.1) вытекает, что гринвичское время T_{gp} и местное время T_m на любом меридиане с долготой λ связаны соотношениями

$$T_m = T_{gp} + \lambda; \quad T_{gp} = T_m - \lambda. \quad (6.2)$$

В этих формулах, как обычно, восточная долгота считается положительной, а западная отрицательной. Например, если $T_{gp}=13.12$, то на меридиане с долготой $\lambda=27^\circ \text{ з.д.} = -27^\circ = -1 \text{ ч } 48 \text{ мин}$, местное время

$$T_m = T_{gp} + \lambda = 13.12 + (-01.48) = 11.24.$$

Поясное, декретное и летнее времена. Жить строго по местному времени невозможно – даже в разных углах одной комнаты оно различно. Тем не менее, еще в XIX веке каждый город России жил по своему времени. Только железная дорога и телеграф работали по единому Санкт-Петербургскому времени.

В 1884 г. на международной конференции в Вашингтоне было реализовано предложение канадского инженера С.Флеминга и введена система поясного времени. Кстати, на этой же конференции в качестве начального был принят гринвичский меридиан.

Вся земля по меридианам разделена на 24 часовых пояса с номерами n от 0 до 23. Гринвичский меридиан является средним меридианом нулевого пояса. Нумерация поясов идет на восток. Средний меридиан первого пояса имеет долготу 15° в.д. , второго – 30° в.д. и т.д. Теоретически ширина пояса должна составлять 15° по долготе и границы каждого пояса должны отстоять от среднего меридиана пояса на $7,5^\circ$ к востоку и западу. Но фактически это имеет место только в океанах, а на суше границы поясов проходят по государственным и административным границам.

В пределах каждого пояса устанавливается свое *поясное время, равное местному времени среднего меридиана данного пояса*. Таким образом, во всех пунктах в пределах пояса с номером N одинаковое поясное время T_N . Поскольку разность долгот средних меридианов поясов (15°) соответствует одному часу времени, получается, что в соседних поясах поясное время различается ровно на один час. Минуты и секунды времени одинаковые, а часы разные. Если пояса не соседние, то *разность поясных времен T_N равна разности номеров поясов, выраженной в часах*:

$$T_{N_2} - T_{N_1} = N_2 - N_1.$$

В России поясное время было введено в 1919 г.

В июне 1930 г. декретом Совета народных комиссаров по предложению Я.Перельмана стрелки всех часов в СССР были переведены на 1 час вперед. Те, кто жил во втором часовом поясе стали жить по времени третьего, те, кто в третьем – по времени четвертого и т.д. Такое время называли *декретным* T_D . Оно введено в целях экономии электроэнергии, чтобы более эффективно использовать светлое время суток.

$$T_D = T_N + 1 \text{ ч.}$$

С 1981 г., по примеру многих зарубежных стран, в нашей стране в летний период стрелки сдвигают еще на 1 час вперед – такое время называют $T_{лет}$. Это также сделано для экономии электроэнергии. Впрочем, дискуссии о том, имеется ли на самом деле экономия и как сказывается переход на летнее время на здоровье человека, продолжаются до сих пор.

$$T_{лет} = T_D + 1 \text{ ч} = T_N + 2 \text{ ч.}$$

В настоящее время (2010 г.) переход на летнее время осуществляется в ночь на последнее воскресенье марта, а обратно, на декретное время, в последнее воскресенье октября.

Таким образом, в России время отличается от поясного зимой на один час, а летом – на два часа. Например, Санкт-Петербург находится практически на среднем меридиане второго пояса ($\lambda = 30$ в.д.). Поясное время здесь отличается от гринвичского на два часа, декретное – на три, летнее – на четыре.

Каждое государство самостоятельно решает, какое время будет использовать на той или другой части своей территории. В обыденной жизни такое время называют «местным», что, как уже отмечалось, является не совсем корректным. В большинстве случаев время на часах жителей определенной территории совпадает с поясным временем какого-либо пояса, но не обязательно того, в котором данная территория фактически расположена. В некоторых странах применяется время, существенно отличающееся от времени пояса, в котором географически находится страна, иногда и на нецелое количество часов. Определить, какое время используется на той или иной территории можно с помощью карты часовых поясов или Сборника аэронавигационной информации. Границы часовых поясов приведены и на маршрутных картах фирмы «Джеппесен».

Некоторые из времен часовых поясов имеют собственные названия, иногда и несколько. В табл. 6.1 приведены названия некоторых времен и примеры местностей, где они используются. В приложении 1 приведен перечень всех стран и территорий мира с указанием отличия «местного» времени от UTC.

Линия перемены даты. Представим себе, что наблюдатель путешествует вдоль параллели, например, на восток и каждый раз переставляет часы по времени текущего часового пояса. По завершении такого кругосветного путешествия на часах у него будет правильное время пункта вылета, но, если часы с автоматическим календарем, они будут показывать уже следующую дату, поскольку часы в итоге были передвинуты на 24 часа вперед. При аналогичном путешествии на запад часы покажут предшествующую дату. Этот парадокс послужил сюжетом для романа Ж.Верна «Вокруг света за 80 дней». Чтобы избавиться от этой проблемы, проведена *линия перемены дат*, которая проходит вблизи меридиана 180° , разделяющего Землю на восточное и западное полушарие, но с учетом географических границ. В частности, она проходит между Чукоткой и Аляской, хотя Чукотский полуостров находится в западном полушарии. При пересечении этой линии в направлении на запад необходимо не только перевести часы на один час назад, но и увеличить дату на одни сутки. Например, если на Аляске было 17 час 3 ноября, то при перемещении на Чукотку будет 16 час 4 ноября. При перемещении через линию перемены дат в восточном направлении дата уменьшается на одни сутки.

Изменение даты необходимо только в том случае, если при перемещении по часовым поясам переставляются стрелки часов, то есть в каждой местности наблюдатель пользуется «местным» временем, принятым на данной территории. Если же время на часах не переставляется, то и необходимости в изменении даты нет. В мировой гражданской авиации полеты выполняются по гринвичскому времени и дата, естественно, считается такой, какова она на гринвичском меридиане. Также не переставляют часы и не меняют дату космонавты, которые в течение суток многократно пересекают линию смены дат.

Преобразование времени. В авиационной практике часто приходится переходить от одного вида времени к другому. Проще и нагляднее всего это сделать, используя гринвичское время. Оно, с одной стороны, является поясным временем нулевого пояса и, следовательно, отличается от любого другого поясного на номер его пояса. С другой стороны оно является местным временем нулевого (гринвичского) меридиана и, следовательно, отличается от местного времени любого меридиана на долготу этого меридиана, выраженную во временной мере. При переводе полезно помнить, что к востоку численное значение времени увеличивается, а к западу – уменьшается.

Например, известно, что местное время на меридиане $\lambda = 37^\circ$ западной долготы $T_m = 11.22$. Требуется определить каково в этот же момент летнее время в Красноярске.

Переведем долготу во временную меру:

$$\lambda = -37^\circ = -37 \times 4 = -148 \text{ мин} = -2 \text{ час } 28 \text{ мин.}$$

Найдем гринвичское время:

$$T_{gp} = T_m - \lambda = 11.22 - (-2.28) = 8.54.$$

Красноярск географически находится в 6 поясе, но его «местное» время с учетом декретного и летнего часов соответствует времени 8 пояса ($N=8$). Тогда

$$T_{лет} = T_{N=8} = T_{гр} + N = 8.54 + 8.00 = 16.54.$$

Системы отсчета времени. Исторически измерение времени основано на видимом движении небесных светил, которое вызвано вращением и движением Земли. И единицы измерения – час, минута, секунда – по своему происхождению являются долями суток, то есть периода обращения Земли вокруг своей оси относительно Солнца. В сутках, как известно, 24 часа, 1440 минут, 86400 секунд.

Для измерения интервалов времени и определения времени суток используются часы. Самые древние виды часов – солнечные, песочные, водяные – не обладали высокой точностью. Только с появлением механических маятниковых часов точность измерения времени кардинальным образом повысилась. Тем не менее, любые часы никогда не показывают абсолютно точное время.

Поправкой часов называется разность между точным временем и показаниями часов. Чтобы получить правильное время, необходимо к показаниям часов прибавить поправку. Если поправка в любой момент известна, то ее величина не имеет никакого значения, даже, если она составляет десятки секунд или минут.

Но любые часы, как известно, спешат или отстают, то есть величина поправки непрерывно изменяется.

Ходом часов называется величина изменения поправки в течение суток. Например, если ход составляет 2 секунды, это означает, что часы отстают на 2 секунды в сутки, то есть поправка для определения точного времени увеличивается каждый день на две секунды.

Величина хода часов также не имеет существенного значения. Если она известна, то можно легко определить, какая будет поправка завтра, через неделю, месяц, а, значит, и определить точное время.

Проблема заключается в том, что у любых часов вследствие самых разных случайных причин ход не является стабильным. То есть, сегодня, например, часы «уйдут» ровно на 2 с, завтра, может быть, на 2,2 с, а послезавтра на 1,7 с...

Возможное отклонение хода от его среднего значения называется *вариацией хода*. Именно вариация хода является показателем качества часов, потому что случайные отклонения от среднего хода учесть невозможно и именно они приведут к неточному измерению времени.

У хороших маятниковых часов суточная вариация хода составляет доли секунды. Лучшие в истории маятниковые часы Шорта с термокомпенсацией инженера Ф.М.Федченко имеют вариацию 0,0002 с.

Таблица 6.1

Собственные названия некоторых времен

Отличие от Т _{гр} , час	Название времени	Примеры городов и стран, в которых применяется время
-8	Североамериканское тихоокеанское, Pacific Time (PT)	США, Канада
-7	Горное, Mountain Time (MT)	США, Канада, Мексика
-6	Центральное, Центральноамериканское, Central Time (CT)	США, Канада, Мексика
-5	Североамериканское восточное, Eastern Time (ET)	США, Канада, Богота, Лима, Кито
-4	Атлантическое, Южноамериканское атлантическое, Atlantic Time (AT)	Канада, Чили, Венесуэла, Бразилия
-3	Южноамериканское восточное	Бразилия, Аргентина, Гренландия
0	Гринвичское, Западноевропейское, Universal Time Coordinated	Исландия, Ирландия, Англия, Португалия, запад Африки
+1	Центральноевропейское, Западное центральноафриканское, Central European Time (CET)	Швеция, Норвегия, Германия, Испания, Франция, Польша, Италия, Тунис, Алжир, Ангола
+2	Восточноевропейское, Eastern European Time (EET)	Финляндия, Эстония, Литва, Латвия, Украина, Калининград, Израиль, Греция, Турция, Египет, ЮАР
+3	Московское, Восточноафриканское	Санкт-Петербург, Москва, Новая Земля, Саудовская Аравия, Ирак
+5	Екатеринбургское, Западноазиатское	Екатеринбург, Пакистан, Узбекистан
+6	Омское, Центральноазиатское	Бангладеш, Казахстан, Шри-Ланка, Омск, Новосибирск
+7	Красноярское	Красноярск, Хатанга, Вьетнам, Индонезия
+8	Иркутское, Западноавстралийское	Иркутск, Монолия, Китай, Австралия
+9	Якутское	Якутия, Корея, Япония
+9:30	Центральноавстралийское	Австралия
+10	Владивостокское, Восточноавстралийское, Западно-тихоокеанское	Владивосток, Австралия
+11	Магаданское, Центрально-тихоокеанское	Магадан, Соломоновы острова, Новая Каледония
+12	Камчатское	Камчатка, Чукотка, Новая Зеландия

В 1927 г. были изобретены кварцевые часы, основанные на высокой стабильности колебаний кристалла кварца при подведении к нему электрического тока. У самых лучших современных образцов кварцевых часов суточная вариация составляет 0,000001 с, то есть *нестабильность* (отношение суточной вариации к продолжительности суток) составляет 10^{-11} .

Точность часов определяется стабильностью того элемента, в котором совершаются колебания и который, собственно, и отсчитывает время . Наиболее стабильными являются колебания атомов и молекул, что и привело в конце концов к созданию молекулярных и атомных часов. Нестабильность атомно-лучевых цезиевых часов достигает 10^{-14} . Это означает, что такие часы «уйдут» на 1 секунду за 3 миллиона лет.

Конечно, чем выше стабильность часов, тем они, как правило, сложнее, дороже и массивнее. Но в принципе задача точного хранения времени, создания его практически равномерной шкалы в значительной степени уже решена.

Однако, еще с изобретением точных кварцевых часов выяснилось, что секунда как единица времени, связанная с периодом вращения Земли, имеет непостоянную величину, поскольку сутки бывают то чуть короче, то чуть длиннее. Это вызвано и неравномерной скоростью вращения планеты, и движением полюсов Земли. Но единица измерения времени должна быть, конечно, постоянной. Поэтому теперь используется определение секунды, не связанное с вращением Земли.

Атомная секунда – период, равный 9 192 631 770 колебаниям, соответствующим резонансной частоте энергетического перехода между уровнями сверхтонкой структуры основного состояния атома – изотопа цезия с массовым числом 133 (при нулевом магнитном поле).

Практически равномерное атомное время в принципе вполне может использоваться для решения всех научных и технических задач. Но его применение в обыденной жизни рано или поздно может вызвать проблемы. Поскольку Земля вращается все медленнее, солнечное время постепенно расходится с равномерным атомным временем и рано или поздно показания атомных часов будут не соответствовать фактическому времени суток, то есть условиям естественного освещения. Обеспечение как равномерности времени, так и соответствия его движению Солнца, осуществляется на основе использования нескольких систем отсчета времени

TAI (International Atomic Time) – *международное атомное время*. Это равномерное время, никак не связанное с вращением Земли, движением небесных светил. В различных странах мира имеются более двухсот атомных стандартов времени, которые постоянно сличаются между собой через спутники навигационных систем GPS и ГЛОНАСС и таким образом создают международную равномерную шкалу времени.

UT0 (Universal Time) – *всемирное время*, которое определяется по астрономическим наблюдениям. Это местное среднее солнечное гражданское

время на гринвичском меридиане. Из-за движения полюсов гринвичский меридиан непрерывно, хотя и незначительно, меняет свое положение. Время *UT0* относится к мгновенному положению гринвичского меридиана. В современных условиях оно определяется не только из оптических наблюдений за светилами, но и методами радиоастрономии по наблюдениям за звездами, квазарами и угловыми отражателями, расположенными на Луне.

UT1 – также астрономическое время, но отличается от *UT0* тем, что относится не к мгновенному, а среднему положению гринвичского меридиана. Для его определения международная служба вращения Земли вводит поправки в *UT0* на движение полюсов.

UT2 – отличается от *UT1* тем, что также вводятся поправки на неравномерность скорости вращения Земли.

UTC (Universal Time Coordinated) – всемирное координированное время. Это атомное время, периодически корректируемое с целью максимального приближения к всемирному времени. По сути, это равномерное атомное время (*TAI*), но периодически при необходимости оно сдвигается ровно на 1 секунду так, чтобы разность *UTC* и *UT1* не превышала 0,9 секунды. Как правило, «лишняя секунда» добавляется перед первым днем января или июля. Например, последняя минута 2005 года включала в себя не 60, а 61 секунду. В настоящее время (2007 г.) *TAI* и *UTC* расходятся уже на 33 секунды.

Таким образом, использование *UTC* позволяет одновременно добиться и равномерности времени, и соответствия движению небесных светил.

Всемирное координированное время является основным международным временем, в частности, используется в мировой авиации. Оно заменило ранее использовавшееся время *GMT (Greenwich Mean Time)*.

6.7. Календарь

Календарь – это непрерывная система счисления длительных промежутков времени, основанная на периодичности явлений природы. Основными периодами при создании календарей являются сутки (обращение Земли вокруг своей оси), месяц (обращение Луны вокруг Земли) и год (обращение Земли вокруг Солнца).

Проблема создания календаря заключается в том, что эти три периода не кратны друг другу. Ни в год, ни в месяц нельзя «уложить» целое число суток, и год также не равен целому числу месяцев. Например, синодический месяц, то есть промежуток времени между одноименными фазами Луны, составляет 29,5305882 суток. Тропический год, то есть период между прохождениями Солнцем точки весеннего равноденствия, равен примерно 365,242205 суток.

Календарь имеет интересную многотысячелетнюю историю, отражающую попытки согласовать между собой сутки месяц и год. Началом появления современного календаря можно считать 46 г. до н.э., когда римский император Юлий Цезарь ввел календарь, разработанный александрийским астрономом Созигеном. Этот календарь был назван *юлианским* и включал в себя 3 года по 365 дней и 1 год в 366 дней (високосный год). Год считается високосным, если число, образованное последними двумя цифрами номера года делится на 4.

В 325 г. уже нашей эры Никейский вселенский собор, который признается и православной церковью, принял юлианский календарь и установил правила определения даты празднования Пасхи. В России этот календарь часто называют «старым стилем».

Средняя продолжительность юлианского года составляет 365,25 суток, что близко к длительности тропического года. Различие между ними составляет 11 мин 14 с. Оно не велико, но каждые 128 лет накапливается погрешность в одни сутки, или, иначе, за каждые 400 лет – трое суток.

К концу XVI века накопилась погрешность уже в 10 дней, то есть настолько ушел фактический день весеннего равноденствия от своей календарной даты 21 марта.

В 1582 г. папа римский Григорий XIII ввел новый календарь, разработанный итальянским врачом и математиком Алоизио Лилио. Календарь был назван, конечно, *григорианским*, а в России его называют также «новым стилем».

Сущность проведенной календарной реформы заключалась в следующем.

Во-первых, чтобы устранить накопившуюся погрешность, счет дней был передвинут на 10 дней вперед. После 4 октября 1582 г. сразу наступило 15 октября 1582 г.

Во-вторых, по сравнению с юлианским, в григорианском календаре в течение каждых 400 лет на три високосных года меньше. Считаются невисокосными годы, номера которых заканчиваются на два нуля (в юлианском календаре они високосные, так как ноль делится на 4), но если *первые две цифры* такого года делятся на четыре, то год все же високосный. Например, за последние 400 лет в григорианском календаре невисокосными были 1700, 1800, 1900 годы, но 2000 год был високосным (20 делится на 4). В юлианском календаре все перечисленные годы были високосными.

В России григорианский календарь был введен в 1918 году. К этому времени расхождение с юлианским календарем составило уже 13 дней и поэтому после 31 января 1918 года наступило 14 февраля 1918 г. Православная церковь не признает календарь, введенный католическим папой, и продолжает пользоваться «старым стилем», то есть юлианским календарем.

Расхождение между календарями возрастает в те годы, которые по юлианскому календарю являются високосными, а по григорианскому – нет. 29 февраля 2100 года расхождение календарей увеличится с 13 до 14 дней.

Средняя за 400 лет продолжительность года в григорианском календаре очень близка к тропическому году. Погрешность в одни сутки накапливается только за 3280 лет.

6.8. Определение условий естественного освещения

Моменты естественного освещения и сумерки. К моментам естественного освещения относятся моменты восхода и захода Солнца, рассвета и наступления темноты. Условия естественного освещения определяются также продолжительностью утренних и вечерних сумерек.

Умение правильно определять наступление моментов естественного освещения имеет в авиации важное значение. Полеты по правилам визуальных полетов выполняются только днем, а в полярных широтах также и в сумерках, поскольку ночью условия для ведения визуальной ориентировки плохие. Некоторые виды минимумов аэродромов могут быть различными для дневных и ночных условий. Оплата труда летного состава может быть различной в зависимости от того, выполняется полет днем или ночью.

Кроме того, при выполнении авиационно-химических работ необходимо не только определять моменты восхода и захода Солнца, но и рассчитывать его высоту и азимут во время проведения этих работ, чтобы не допустить ослепления экипажа прямыми лучами низкого Солнца в полете на предельно малой высоте.

День – это период времени от восхода до захода Солнца.

Ночь – период времени от захода до восхода Солнца.

Светлое время суток – период времени от рассвета до наступления темноты.

Темное время суток – период времени от наступления темноты до рассвета.

Сумерки – переходные периоды от момента наступления рассвета до восхода (утренние сумерки) и от захода до наступления темноты (вечерние сумерки).

Различают истинный и видимый восходы (заходы) Солнца.

Истинными восходом и заходом называются моменты пересечения центром Солнца истинного горизонта. Очевидно, что при восходе Солнце пересекает горизонт снизу вверх, а при заходе – сверху вниз.

Видимые восход и заход - моменты пересечения верхним краем Солнца линии видимого горизонта.

Истинные восход и заход являются чисто геометрическими понятиями, а видимые – это то, что в действительности видит наблюдатель. Именно

видимые восход и заход должны рассчитываться и публиковаться в документах аэронавигационной информации.

Видимые восход и заход отличаются от истинных по следующим причинам:

1) Средний видимый диаметр Солнца составляет $32'$. Когда верхний его край пересекает линию горизонта, центр Солнца находится под горизонтом на высоте $h = -16'$.

2) Рефракция. *Рефракцией* называется преломление световых лучей при прохождении через неоднородную атмосферу (рис. 6.12). Путь световых лучей искривляется и они попадают в глаз наблюдателя не с того направления, в котором на самом деле находится Солнце. Вследствие рефракции все светила видны выше, чем они расположены на самом деле. Чем меньше высота светила, тем больше рефракция. Для светила в зените она равна нулю, а для светила на горизонте она максимальна.

На самом деле рефракция r зависит не только от высоты светила, но и от атмосферного давления, температуры воздуха. Для условий стандартной атмосферы при $h=0$ (светило на горизонте) принимается, что рефракция составляет: $r=35'$. Это означает, что в момент видимого восхода или захода Солнце на самом деле находится на данную величину под горизонтом и, если бы атмосфера вдруг исчезла, то не стало бы видно и Солнца.

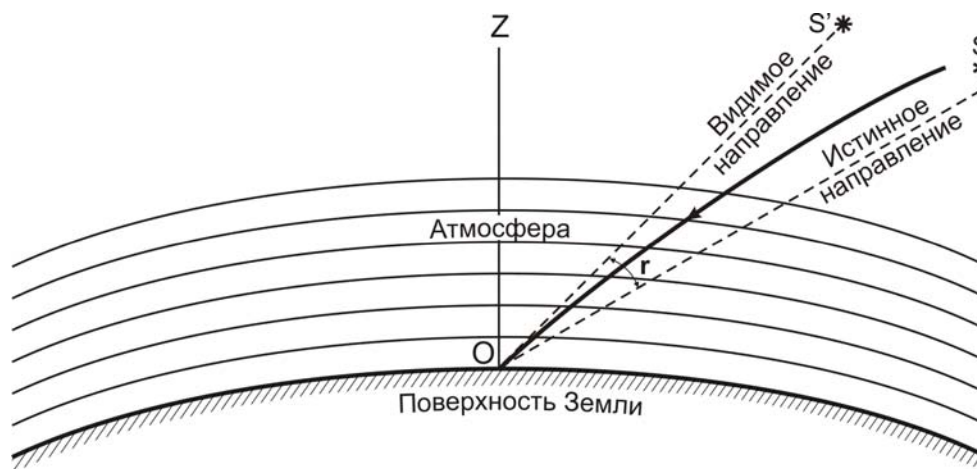


Рис. 6.12. Рефракция световых лучей в атмосфере

3) Понижение видимого горизонта. Истинный горизонт — геометрическое понятие — линия пересечения небесной сферы с горизонтальной плоскостью. Видимый горизонт — тот горизонт, который на самом деле видит наблюдатель в открытой местности, например, при полете над морем. Он находится тем ниже, чем больше высота полета.

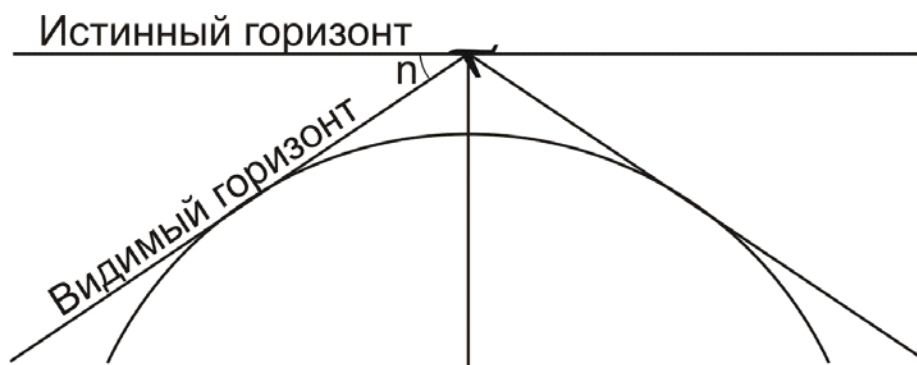


Рис. 6.13. Истинный и видимый горизонты

Угловая разница между истинным и видимым горизонтами называется *понижением горизонта n* . Она может быть точно определена по специальным таблицам или рассчитана по приближенной формуле

$$n \approx 1,77\sqrt{H},$$

где n - понижение горизонта в угловых минутах, а H - высота полета в метрах.

Например, в полете на высоте 10000 м понижение горизонта составит почти 3° .

Таким образом, с учетом рефракции ($35'$) и радиуса Солнца ($16'$) в моменты видимого восхода и захода центр Солнца находится на высоте $h = -(51 + n)'$.

Понижение горизонта учитывается только тогда, когда действительно необходимо определить момент фактического появления Солнца из-за горизонта в полете на заданной высоте. Это может оказаться необходимым для применения астрономических средств навигации. Но для большинства задач аэронавигационного обеспечения полетов требуется определять моменты естественного освещения для наблюдателя на поверхности Земли, например, на аэродроме. В этом случае $n=0$ и поэтому в дальнейшем мы учитывать понижение горизонта не будем.

Рассветом и наступлением темноты называются моменты, когда высота Солнца (его центра) равна $h = -6^\circ$, то есть Солнце находится на 6 градусов ниже истинного горизонта. Очевидно, что рассвет имеет место утром, до восхода, когда Солнце, поднимаясь, достигает указанной отрицательной высоты. Наступление темноты происходит после захода, когда Солнце опускается.

Необходимо подчеркнуть, что на самом деле момент «наступления темноты» никак не связан с освещенностью на местности, а определяется только геометрически, высотой Солнца. Условия же освещенности, то есть насколько светло или темно в данный момент, зависят не только от высоты светила, но и от погоды (наличия облачности) и других факторов.

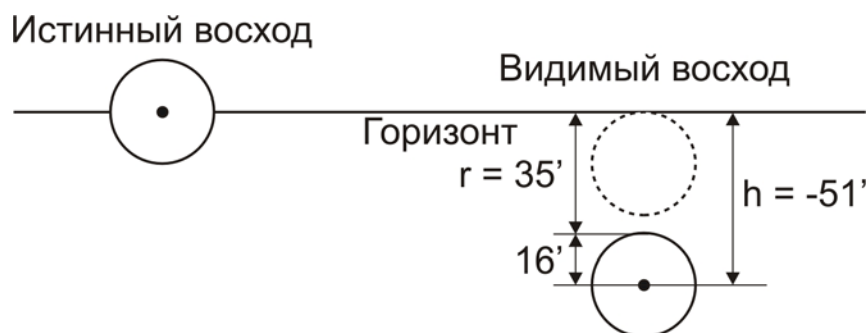


Рис. 6.14. Истинный и видимый восход (заход) Солнца

Соответственно, утренние сумерки длятся от рассвета до восхода, а вечерние от захода до наступления темноты. Принятая величина 6° определяет так называемые *гражданские сумерки*, именно они и рассчитываются для использования в авиации. Реже используются *навигационные сумерки*, которые начинаются или кончаются при отрицательной высоте Солнца 12° . Считается, что вечером при понижении Солнца на такую величину под горизонт становятся видны двадцать самых ярких звезд. Их называют навигационными звездами, потому что для них составлены астрономические таблицы, позволяющие решать задачи навигации с использованием астрономических средств. Существуют и *астрономические сумерки*, конец или начало которых соответствует понижению Солнца на 18° . Вечером в этот момент становятся видны практически все звезды.

Расчет моментов естественного освещения. Моменты восхода, захода, рассвета и наступления темноты могут быть рассчитаны аналитически (по формулам) или определены по заранее составленным таблицам в справочниках.

Для аналитического расчета необходимо знать широту φ и долготу λ пункта, для которого выполняется расчет, а также склонение Солнца δ и уравнение времени η на нужную дату. Если не требуется точность расчета выше одной минуты, геодезические координаты пункта можно приравнять к сферическим. Склонение и уравнение времени можно определить по номограмме на рис. 6.11.

Рассмотрим порядок расчета. При анализе параллактического треугольника была приведена выведенная из него формула

$$\sinh = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos t,$$

откуда можно выразить косинус часового угла:

$$\cos t = \frac{\sinh - \sin \delta \sin \varphi}{\cos \varphi \cos \delta}$$

По этой формуле можно определить часовой угол светила, в том числе Солнца, в тот момент, когда его высота равна любому заданному значению h . Для пункта на поверхности Земли в момент видимого восхода и захода высота Солнца $h = -51'$, а в моменты рассвета и наступления темноты $h = -6^\circ$. Подставив в формулу данные значения высот, можно рассчитать часовой угол Солнца в эти моменты времени.

Поскольку в формулу подставляются склонение и высота истинного Солнца, то и рассчитанный часовой угол соответствует истинному Солнцу. Но этот *часовой угол – это и есть истинное солнечное местное астрономическое время*. Поэтому остается только перейти от этого времени к нужному (гринвичскому, поясному и т.п.).

Приведем пример расчета. Пусть требуется определить время восхода и захода Солнца по гринвичскому времени в аэропорту Матавери (остров Пасхи) 13 августа. По рис. 6.11 находим, что склонение Солнца в этот день составляет $\delta = +14,7^\circ$, а уравнение времени $\eta = +5,8$ мин (округлим до 6 мин). Широта аэропорта $27^\circ 09,9'$ южной широты ($\varphi = -27,165^\circ$), а долгота $109^\circ 25,3'$ западной долготы ($\lambda = -109,422^\circ = -437,688$ мин ≈ -7 ч 18 мин). Учтем также, что высота Солнца в моменты восхода и захода $h = -51' = -0,85^\circ$. Подставляя в формулу, получим

$$\cos t = \frac{\sin(-0,85^\circ) - \sin(+14,7^\circ) \sin(-27,165^\circ)}{\cos(-27,165^\circ) \cos(+14,7^\circ)} = +0,1174.$$

Взяв на калькуляторе арккосинус от этого значения, получим $t = 83,26^\circ$. Но косинус – функция четная, одно и то же значение косинуса соответствует двум значениям угла – положительному и отрицательному. Поэтому нами найдено два значения часового угла: $t = \pm 83,26^\circ$. Одно из этих значений соответствует восходу, другое заходу. Поскольку часовой угол отсчитывается от южной части небесного меридиана на запад (со знаком плюс), то очевидно, что положительное значение t соответствует заходу (Солнце заходит в западной части неба), а отрицательное – восходу.

Переведем часовой угол из угловой меры во временную, учитывая, что 1° соответствует 4 мин, а в часе содержится 60 мин.

$$t = \pm 83,26^\circ = \pm 333 \text{ мин} = \pm 5 \text{ ч } 33 \text{ мин}.$$

Соответственно истинное местное астрономическое время восхода

$$t_{\text{ист}} = -5 \text{ ч } 33 \text{ мин} = 18 \text{ ч } 27 \text{ мин}$$

(добавлено 24 ч, чтобы время было положительным),

а захода

$$t_{\text{ист}} = 5 \text{ ч } 33 \text{ мин}.$$

Чтобы получить среднее солнечное время прибавим уравнение времени ($\eta = +6$ мин).

Восход:

$$t_{cp} = 18 \text{ ч } 27 \text{ мин} + 6 \text{ мин} = 18 \text{ ч } 33 \text{ мин}.$$

Заход:

$$t_{cp} = 5 \text{ ч } 33 \text{ мин} + 6 \text{ мин} = 5 \text{ ч } 39 \text{ мин}.$$

Перейдя от астрономического времени к гражданскому, отсчитываемому от полуночи, получим местное гражданское время (необходимо прибавить или вычесть 12 часов).

Восход:

$$T_M = 18 \text{ ч } 33 \text{ мин} - 12 \text{ ч} = 6 \text{ ч } 33 \text{ мин}.$$

Заход:

$$T_M = 5 \text{ ч } 39 \text{ мин} + 12 \text{ ч} = 17 \text{ ч } 39 \text{ мин}.$$

Это местное время на меридиане данного аэропорта. Чтобы перейти к гринвичскому времени, необходимо вычесть долготу:

Восход:

$$T_{gr} = 6 \text{ ч } 33 \text{ мин} - (-7 \text{ ч } 18 \text{ мин}) = 13 \text{ ч } 51 \text{ мин}.$$

Заход:

$$T_{gr} = 17 \text{ ч } 39 \text{ мин} - (-7 \text{ ч } 18 \text{ мин}) = 24 \text{ ч } 57 \text{ мин} = 0 \text{ ч } 57 \text{ мин}.$$

Остров Пасхи находится географически в 17-ом часовом поясе, но его население живет по времени 20-го пояса (остров относится к Чили, которая расположена в этом поясе). Чтобы перейти от гринвичского времени к поясному, нужно прибавить номер пояса в часах.

Восход:

$$T_N = 13 \text{ ч } 51 \text{ мин} + 20 \text{ ч} = 9 \text{ ч } 51 \text{ мин}.$$

Заход:

$$T_N = 0 \text{ ч } 57 \text{ мин} + 20 \text{ ч} = 20 \text{ ч } 57 \text{ мин}.$$

Такое время будет на часах жителей острова в моменты восхода и захода.

Эти же моменты по московскому летнему времени ($N=4$) рассчитываются аналогично: восход будет в 17 ч 51 мин, а заход в 4 ч 57 мин.

Расчет моментов рассвета и наступления темноты выполняется точно так же, но для расчета часового угла подставляется $h = -6^\circ$. После этого нетрудно определить и продолжительность сумерек как интервал времени между рассветом и восходом (утренние сумерки) или заходом и наступлением темноты (вечерние сумерки). Они примерно одинаковы.

Для упрощения определения моментов естественного освещения в аэропортах и авиакомпаниях используются Календарные справочники моментов восхода и захода Солнца, рассвета и наступления темноты. В этих справочниках для нескольких сотен пунктов (аэродромов) по всему земному шару приведены моменты естественного освещения на все дни года (с интервалом 5 дней). Правила использования этих справочников приведены в их предисловии.

С помощью параллактического треугольника можно вывести и формулу для расчета азимута Солнца в тот момент, когда его высота равна любой заданной высоте h .

$$\cos A = \frac{\sin \delta - \sin \varphi \sin h}{\cos \varphi \cosh}.$$

Подставив в эту формулу $h = -51'$, получим положительное и отрицательное значение азимута Солнца. Поскольку азимут отсчитывается от направления на север на восток, положительное значение соответствует восходу, а отрицательное - заходу (его необходимо превратить в положительное, прибавив 360°).

Определение моментов встречи с восходом, заходом, рассветом и наступлением темноты. В авиационной практике часто возникает задача такого вида. В аэропортах вылета и посадки Солнце восходит в разные моменты времени. Самолет летит из аэропорта вылета в аэропорт посадки, причем вылетает до восхода, а садится после восхода. В какой момент времени взойдет Солнце для экипажа данного самолета?

Легче всего решить эту задачу способом графической интерполяции (рис. 6.15).

На листе бумаги в произвольном масштабе рисуют две параллельные шкалы времени с одинаковой оцифровкой. Одна из них соответствует аэродрому вылета, другая – аэродрому посадки. На этих шкалах помечают соответственно моменты восхода в этих аэропортах и соединяют их прямой линией. Также соединяют прямой линией время вылета и посадки. Точка пересечения проведенных прямых соответствует моменту встречи с восходом. Его можно отсчитать по любой из шкал.



Рис. 6.15.Определение встречи с моментами естественного освещения

Аналогично можно определить встречу и с другими моментами естественного освещения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П.1

Отличие времени от UTC

Страны и территории	Отличие от UTC, час
Австралия:	
- Норфолк	+11.30
- столичная территория, Новый Южный Уэльс, Виктория, Квинсленд, Тасмания	+10
- Северная территория, Южная Австралия	+9.30
- Западная Австралия	+8
- Кристмас, о-в	+7
- Кокос (Килинг), о-в	+6.30
Австрия	+1
Азербайджан	+4
Азорские острова	-1
Албания	+1
Алжир	+1
Ангвилла	-4
Ангола	+1
Андорра	+1
Антигуа и Барбуда	-4
Аргентина	-3
Армения	+4
Аруба	-4
Афганистан	+4.30
Багамские острова	-5
Бангладеш	+6
Барбадос	-4
Бахрейн	+3
Беларусь	+2
Белиз	-6
Бельгия	+1
Бенин	+1
Бермудские острова	-4
Болгария	+2
Боливия	-4
Босния и Герцеговина	+1
Ботсвана	+2
Бразилия:	
- Фернандо де	-2

Страны и территории	Отличие от UTC, час
Наронхора, о-в	
- Бразилиа, Рио де Жанейро, Сан-Пауло, Сергипе	-3
- Мато-Гроссо	-4
- Акре	-5
Британская Вирджиния, о-ва	-4
Бруней	+8
Буркина-Фасо	0
Бурунди	+2
Бутан	+6
Вануату	+11
Великобритания	0
Венгрия	+1
Венесуэла	-4
Виргинские о-ва (США)	
Воллис и Футуна о-ва (Франция)	+12
Вьетнам	+7
Вэйк о-в (США)	+12
Габон	+1
Гаити	-5
Гайана	-4
Гамбия	0
Гана	0
Гваделупа	-4
Гватемала	-6
Гвинея	0
Гвинея-Биссау	0
Германия	+1
Гибралтар	+1
Гондурас	-6
Гонконг	+8
Гренада	-4
Гренландия:	
- Северовосточная часть	-1
- Центральная часть	-2
- Западная часть	-3

Страны и территории	Отличие от UTC, час
Греция	+2
Грузия	+3
Гуам	+10
Дания	+1
Джибути	+3
Джонстон атолл	-10
Доминика	-4
Доминиканская Республика	-4
Египет	+2
Замбия	+2
Зимбабве	+2
Израиль	+2
Индия	+5.30
Индонезия:	
- восточная	+9
- центральная	+8
- западная	+7
Иордания	+2
Ирак	+3
Иран	+3.30
Ирландия	0
Исландия	0
Испания	+1
Италия	+1
Йемен	+3
Кабо-Верде	-1
Казахстан:	
- западный	+4
- восточный	+6
Кайман о-ва	-5
Камбоджа	+7
Камерун	+1
Канада:	
- Ньюфаундленд, п-ов Лабрадор	-3.30
- Атлантика (п-ов Лабрадор, Нью-Брансуик, Новая Шотландия, о-в Принс-Эдуард)	-4
- Восток (Нунавут, Онтарио, Квебек)	-5
-Центр (Манитоба, Нунавут, Онтарио, Саскачеван)	-6
- Горные районы (Альберта, Британская Колумбия, Северо-	-7

Страны и территории	Отличие от UTC, час
западные территории, Нунавут)	
- Тихоокеанский р-н (Британская Колумбия, Юкон, Нунавут)	-8
Канарские о-ва	0
Катар	+3
Кения	+3
Кипр	+2
Киргизстан	+5
Кирибати:	
- о-ва Лайн	+14
- о-ва Феникс	+13
- о-ва Гилберта	+12
Китай	+8
Колумбия	-5
Коморские острова	+3
Конго:	
- Восток	+2
- Запад	+1
Корейская НДР	+9
Корея	+9
Коста Рика	-6
Кот-д'Ивуар	0
Куба	-5
Кувейт	+3
Кука о-ва	-10
Лаос	+7
Латвия	+2
Лесото	+2
Либерия	0
Ливан	+2
Ливия	+2
Литва	+2
Лихтенштейн	+1
Люксембург	+1
Маврикий	+4
Мавритания	0
Мадагаскар	+3
Мадейра	0
Македония	+1
Малави	+2
Малайзия	+8
Мали	0
Мальдивы	+5
Мальта	+1
Мартиника о-в	-4
Маршалловы о-ва	+12
Масао	+8

Страны и территории	Отличие от UTC, час
Мексика:	
- Нижняя Калифорния (северная)	-8
- Нижняя Калифорния (южная), Чиуауа, Наярит, Синалоа, Сонора	-7
- южная, центральная и восточная части	-6
Мидвэй атолл	-11
Микронезия:	
- Косраэ о-в, Понапе о-в	+11
- Яп о-в, Чуук о-в	+10
Мозамбик	+2
Молдова	+2
Монголия:	
- западная часть	+7
- центральная часть	+8
- восточная часть	+9
Морокко	0
Мьянма	+6.30
Намибия	+1
Науру	+12
Непал	+5.45
Нигер	+1
Нигерия	+1
Нидерландские Антиллы	-4
Нидерланды	+1
Никарагуа	-6
Ниуэ о-в	-11
Новая Зеландия:	+12
- Чатем о-в	+12.45
Новая Каледония	+11
Норвегия	+1
Объединенные Арабские Эмираты	+4
Оман	+4
Пакистан	+5
Палау	+9
Палестинские территории	+2
Панама	-5
Папуа Новая Гвинея	+10
Парагвай	-4
Перу	-5
Польша	+1
Португалия	0
Пуэрто-Рико	-4
Реюньон	+4

Страны и территории	Отличие от UTC, час
Россия:	
- Калининград	+2
- Европейская часть	+3
- Самара, Ижевск, Астрахань	+4
- Урал, Тюмень, Салехард, Оренбург	+5
- Новосибирск, Омск	+6
- Барнаул, Кемерово, Дудинка, Красноярск, Томск	+7
- Иркутск, Улан-Уде	+8
- Якутск, Чита, Благовещенск	+9
- Хабаровск, Владивосток	+10
- Магадан, Курильские о-ва	+11
- Камчатка, Чукотка	+12
Руанда	+2
Румыния	+2
Сальвадор	-6
Самоа	-11
Самоа восточное (США)	-11
Сан-Томе и Принсипи	0
Саудовская Аравия	+3
Свазиленд	+2
Северные Марианские о-ва	+10
Сейшельские Острова	+4
Сенегал	0
Сент Люсия	-4
Сент Пьер и Микелон (Франция)	-3
Сент-Винсент и Гренадины	-4
Сент-Китс и Невис	-4
Сербия и Черногория	+1
Сингапур	+8
Сирия	+2
Словакия	+1
Словения	+1
Соединенные Штаты Америки	
- восточная часть	-5
- центральная часть	-6
- горный район	-7
- тихоокеанский район	-8
- Аляска	-9

Страны и территории	Отличие от UTC, час
- Аляска (Алеутские острова)	-10
- Гавайские о-ва	-10
Соломоновы о-ва	+11
Сомали	+3
Судан	+3
Суринам	-3
Сьерра-Леоне	0
Таджикистан	+5
Таиланд	+7
Тайвань	+8
Танзания	+3
Теркс и Кайкос	-5
Того	0
Тонга	+13
Тринидад и Тобаго	-4
Тувалу	+12
Тунис	+1
Туркменистан	+5
Турция	+2
Уганда	+3
Узбекистан	+5
Украина	+2
Уругвай	-3
Фарерские о-ва	0
Фиджи о-ва	+12
Филиппины	+8
Финляндия	+2
Франция	+1
Французская Гаиана	-3
Французская Полинезия:	-10
- Маркизские о-ва	-9.30
Хорватия	+1
-Центр (Манитоба, Нунавут, Онтарио, Саскачеван)	-6
Чад	+1
Чехия	+1
Чили:	-4
- Восточная часть	-6
Швеция	+1
Шри-Ланка	+6
Швейцария	+1
Эквадор:	-5
- Галапагосские о-ва	-6
Экваториальная Гвинея	+1
Эритрея	+3
Эстония	+2
Эфиопия	+3

Страны и территории	Отличие от UTC, час
Южно-Африканская республика	+2
Ямайка	-5
Япония	+9

ЛИТЕРАТУРА

1. Авиационная картография и военная топография. Под ред. Шабунина А.И. – М.: Воениздат, 1986.
2. Аникин А.М., Малишевский А.В. Авиационная картография. Ч.1. Л.: ОЛАГА, 1987.
3. Аникин А.М., Малишевский А.В. Авиационная картография. Ч.2. Л.: ОЛАГА, 1988.
4. Аппаратура радионавигационная глобальной навигационной спутниковой системы и глобальной системы позиционирования. Системы координат. Методы преобразования координат определяемых точек. ГОСТ Р 51794-2001. М.: Стандартинформ, 2001.
5. Вахрамеева Л.А., Бугаевский Л.М., Казакова З.Л. Математическая картография.- М.: Наука, 1986.
6. Воробьев Л.М. Астрономическая навигация летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1968.
7. Ганьшин В.Н. Геометрия земного эллипсоида. М.: Недра, 1967.
8. Ганьшин В.Н., Малишевский В.Н. Картография и геодезия. Л.: ОЛАГА, 1978.
9. Гараевская Л.С., Малюсова Н.В. Практическое пособие по картографии. М.: Недра, 1990.
10. Географические информационные системы. Координатная основа. Общие требования. ГОСТ Р 52572-2006. М.:Стандартинформ, 2006.
11. Граур А.В. Математическая картография. – Л.: Учпедгиз, 1938.
12. Грушинский Н.П. Теория фигуры Земли. - М.:Гос. изд-во физ.-мат. лит, 1963
13. Грушинский Н.П., Грушинский А.Н. В мире сил тяготения. – М.: Недра, 1978.
14. Гуревич В.Б. Введение в сферическую астрономию. М.: Наука, 1979.
15. Демин В.М. Теория и практика применения карт в авиации. М: Машиностроение, 1969.
16. Завельский Ф.С. Время и его измерение. М.: Наука, 1987.
17. Закатов П.С. Курс высшей геодезии. – М.: Недра, 1976.
18. Каврайский В.В. Математическая картография. –М.Л.: Редбаза Картотреста, 1934.
19. Каврайский В.В. Обобщенный способ линий положения. В кн. Избранные труды. Т. I. Астрономия и геодезия. М.: УНГС ВМФ, 1956.
20. Календарный справочник времени восхода и захода Солнца, наступления рассвета и темноты. М.: Воздушный транспорт, 1984.
21. Климишин И.А. Календарь и хронология. М.: Наука, 1985.
22. Комаровский Ю.А. Использование различных референц-эллипсоидов в судовождении. – Владивосток: Мор. гос. ун-т, 2005.
23. Кондратьев Н.Я. Авиационная астрономия. – М.: Воениздат, 1969.

24. Куликовский П.Г. Справочник любителя астрономии. – М.: Наука, 1971.
25. Лиодт Г.Н. Картоведение. – М.: Учпедгиз, 1938.
25. Михайлов А.А. Земля и ее вращение. М.: Наука, 1984.
27. Монин А.С. Вращение Земли и климат. – Л.: Гидрометеиздат, 1972.
28. Почтарев В.И. Земля – большой магнит. – Л.: Гидрометеиздат, 1974.
29. Ратц Б.Г. Курс самолетовождения. Часть I. Картография. – М.: Воениздат, 1946.
30. Руководство по Всемирной геодезической системе – 1984 (WGS-84), Дос. 9674 ИКАО.
31. Руководство пользователя по выполнению работ в системе координат 1995 года (СК-95). М.: ГКИНП, 2004.
32. Салищев К.А. Картография. М.: Высш. школа, 1982.
33. Серапинас Б.Б. Математическая картография. – М.: «Академия», 2005.
34. Сороковик Н.С. Авиационная картография. – М.: ВВА, 1953.
35. Степанов Н.Н. Сферическая тригонометрия. Л.: ОГИЗ, 1948.
36. Хаимов З.С. Основы высшей геодезии. – М.: Недра, 1984.
37. Хауз Д. Гринвичское время и открытие долготы. – М.: Мир, 1982.
38. Цыбульский В.В. Календари и хронология стран мира. М.: Просвещение, 1982.
39. Черный М.А. Авиационная астрономия. М.: Транспорт, 1978.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
1. ВВЕДЕНИЕ	4
1.1. Предмет дисциплины	4
1.2. Краткая историческая справка	7
2. ЗЕМЛЯ КАК ПЛАНЕТА	11
2.1. Фигура Земли и ее движение	11
2.2. Гравитационное поле Земли	18
2.3. Магнитное поле Земли	24
3. ЗЕМНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ	34
3.1. Прямоугольные системы координат	34
3.2. Сферические системы координат	36
3.3. Параметры земного эллипсоида и геодезическая система координат	40
3.4. Система измерения высот	45
3.5. Астрономические координаты	52
3.6. Многообразие геодезических систем координат	53
3.7. Геодезические сети	54
3.8. Геодезическая система координат СК-42	58
3.9. Международные системы отсчета	61
3.10. Всемирная геодезическая система WGS-84	64
3.11. Система геодезических параметров Земли ПЗ-90	69
3.12. Геодезическая система координат СК-95	72
3.13. Преобразование геодезических координат	74
4. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА СФЕРЕ И ЭЛЛИПСОИДЕ	81
4.1. Отображение поверхности земного эллипсоида на сферу	81
4.2. Основные сведения из сферической тригонометрии	84
4.3. Практика геодезических расчетов с помощью микрокалькуляторов	89
4.4. Ортодромия	94
4.5. Угол схождения меридианов на сфере	103
4.6. Преобразование сферических координат в ортодромические	105
4.7. Локсодромия	107
4.8. Сравнение локсодромии и ортодромии	111
4.9. Линии положения на сфере	112
4.10. Геодезическая линия на эллипсоиде	119
4.11. Определение расстояний и направлений на поверхности эллипсоида	122

5. АВИАЦИОННАЯ КАРТОГРАФИЯ	124
5.1. Понятие о картографической проекции	124
5.2. Масштаб	127
5.3. Основные понятия теории искажений	132
5.4. Классификация проекций по характеру искажений	139
5.5. Классификация проекций по виду нормальной сетки	141
5.6. Другие виды классификации проекций	146
5.7. Общие свойства цилиндрических проекций	147
5.8. Проекция Уэтча	147
5.9. Простая (квадратная) цилиндрическая проекция	151
5.10. Равноугольная цилиндрическая проекция (проекция Меркатора)	154
5.11. Проекция Гаусса – Крюгера	160
5.12. Косые цилиндрические проекции	165
5.13. Общие сведения об азимутальных проекциях	166
5.14. Центральная полярная проекция	169
5.15. Стереографическая проекция	173
5.16. Общие сведения о конических проекциях	177
5.17. Простая коническая проекция	179
5.18. Равноугольные конические проекции	182
5.19. Виды равноугольных конических проекций	185
5.20. Свойства проекции Ламберта	188
5.21. Понятие о поликонических проекциях	190
5.22. Видоизмененная поликоническая (международная) проекция	193
5.23. Разграфка и номенклатура карт	196
5.24. Точность работы на аэронавигационных картах	200
5.25. Функции и элементы аэронавигационных карт	202
6. ВРЕМЯ И УСЛОВИЯ ЕСТЕСТВЕННОГО ОСВЕЩЕНИЯ	206
6.1. Небесная сфера	206
6.2. Системы небесных координат	209
6.3. Высота полюса мира	212
6.4. Параллактический треугольник	213
6.5. Видимое движение небесных светил	214
6.6. Измерение времени	216
6.7. Календарь	229
6.8. Определение условий естественного освещения	231
ПРИЛОЖЕНИЕ. Отличие времени от UTC	238
ЛИТЕРАТУРА	242